ASE-2510 Johdatus systeemien analysointiin, 2. välikoe

8.5.2013

Yhteensä max 15 pistettä (5+5+5). Tehtävässä 3 lisäksi 4 bonuspistettä.

Kaikki kurssimateriaali ja laskimet sallittu välikokeessa.

1. Erään koneen vikaantumista tarkastellaan kuukauden jaksoissa ja havaitaan, kuinka monta kertaa ko kuukauden aikana kone on vikaantunut. Jos vikaantumiset oletetaan toisistaan riippumattomiksi tapahtumiksi, katkojen lukumäärä kuukaudessa, *N*, on satunnaismuuttuja, joka noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla λ:

$$P(N=n)=\frac{\lambda^n}{n!}\exp(-\lambda)$$

Koneen vikaantumiskertojen lukumäärästä per kuukausi meillä on seuraavat havainnot *N* = {2, 4, 3, 5, 2, 6, 7, 1, 2, 4, 8, 2}.

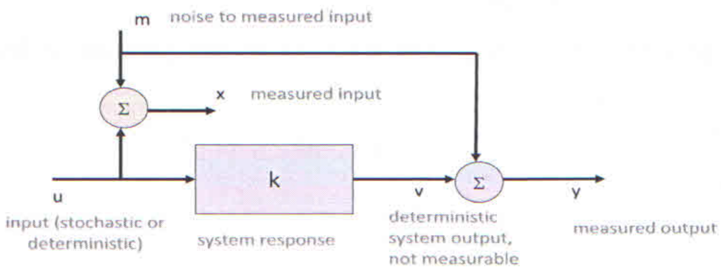
a) Lausu parametrin λ maximum likelihood -estimaatti $\hat{\lambda}$ havaintotulosten avulla (3 pistettä).

b) Laske parametria λ koskeva informaatio (todennäköisyysjakauma) Laplace -approksimaatiossa

$$f_\Lambda(\lambda)=C\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\lambda^2}\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)^2\right]$$

missä C on normitusvakio. Lausu parametriepävarmuus σ_λ^2 havaintotulosten avulla (2 pistettä).

2. Tarkastellaan lineaarista determinististä dynaamista järjestelmää, jonka todellinen input on u(t) ja output on v(t). Inputin ja outputin mittauksilla x(t) ja y(t) on yhteinen kohinalähde m(t), joka on riippumaton todellisesta inputista: E{u(ω)m(ω)}=0. Systeemin sakenne on esitetty alla:



Estimoidaan siirtofunktion k Fourier-muunnosta $K_{uv}(\omega)$ seuraavasti:

$$\hat{K}_{uv}(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

a) Ilmaise estimaatti todellisen siirtofunktion Fourier-muunnoksen ja spektrien $S_{uu}(\omega), S_{mm}(\omega)$ avulla (3 pistettä).

b) Lausu koherenssi vastaavalla tavalla. Auttaako se päättelemään, millä kulmataajuuksilla estimaatti on luotettava? (2 pistettä)

3. Tarkastellaan dynaamista systeemiä, jonka malli on lausuttu siirtotodennäköisyytenä:

$$f\left(x(n+1) \mid x(n), a\right) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x(n+1) - a \cdot x(n)\right)^2\right]$$

Oletetaan, että meillä on yhtenäinen aikasarja havaintoja tilasta x: $\{x(n)\}_{n=1}^{N}$. Oletetaan myös, että σ^2 on tunnettu.

a) Perustele, miksi informaatio parametrista a voidaan kirjoittaa muodossa:

$$f_A\left(a \mid \{x(n)\}_{n=1}^{N}\right) = C \cdot \left[\prod_{n=2}^{N} f\left(x(n+1) \mid x(n), a\right)\right] \cdot f\left(x(1) \mid a\right) \cdot f_{ap}(a) \quad \text{(1 piste)}$$

b) Laske parametriestimaatti olettaen, että ennakkotietoa ei ole ja että x(1):n jakauma ei riipu a:sta. (2.5 pistettä)

c) Osoita, että $f_A\left(a \mid \{x(n)\}_{n=1}^{N}\right)$ on normaalijakauma ja laske ko normaalijakauman hajonta (parametriepävarmuus) (1.5 pistettä).

d) Oletetaan, että

$$f_{ap}(a) = (2\pi\sigma_{ap}^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{ap}^2}\left(a - a_{ap}\right)^2\right]$$

Mikä nyt on parametriestimaatti (2 bonuspistettä) ja mikä parametriepävarmuus (2 bonuspistettä).