

SGN-11000 Signaalinkäsittelyn perusteet
Tentti 6.6.2019
Heikki Huttunen

- ▷ Oma laskin sallittu.
- ▷ Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa.
- ▷ Merkitse vastauspaperiin koska olet suorittanut pakolliset harjoitukset (jos ei kevät 2019).
- ▷ Vastaa konseptille. Kirjoita myös nimesi ja opiskelijanumerosi.

1. Ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia? (Perusteluja ei tarvita. Oikea vastaus: 1 p, väärä: $-\frac{1}{2}$ p, ei vastausta 0 p.) Pistemäärä pyöristetään ylöspäin lähimpään kokonaislukuun.

- (a) Signaalin $x(n)y(n)$ DFT on $X(n)/Y(n)$.
- (b) Vaihevasteen lineaarisuus takaa, että signaalin kaikki taajuudet viivästyvät yhtä monta sekuntia.
- (c) Sinisignaalin värähtelytaajuus on 8000 Hz, ja siitä otetaan näytteitä $T = \frac{1}{10000}$ sekunnin välein. Tällöin tulossignaali näyttää värähtelevän 5000 Hertsin taajuudella.
- (d) Kaksi rinnakkaista LTI-järjestelmää voidaan aina toteuttaa yhtenä järjestelmänä.
- (e) FIR-suotimen siirtymäkaistan leveys on kääntäen verrannollinen kertoimien määrään.
- (f) Desimoinnin yhteydessä tavattu $\lfloor \cdot \rfloor$ -operaatio lisää $N - 1$ nollaa jokaisen kahden peräkkäisen näytteen väliin.

2. (a) Erään suotimen napanollakuvio on kuvassa 1 (vasen), ja tiedetään että sen amplitudivaste $|H(e^{j\omega})| \in [0, 1]$. Hahmottele suotimen amplitudivasteen kuvaaja niin tarkasti kuin se näillä tiedoilla onnistuu. (2p)

(b) Onko kuvan 1 suodin stabiili? Millä perusteella? (1p) Entä onko kuvan 1 suodin FIR vai IIR? Millä perusteella? (1p)

(c) Laske vektorin

$$\mathbf{x} = [-5, -1, 1, 0]^T$$

diskreetti Fourier-muunnos. (2p)

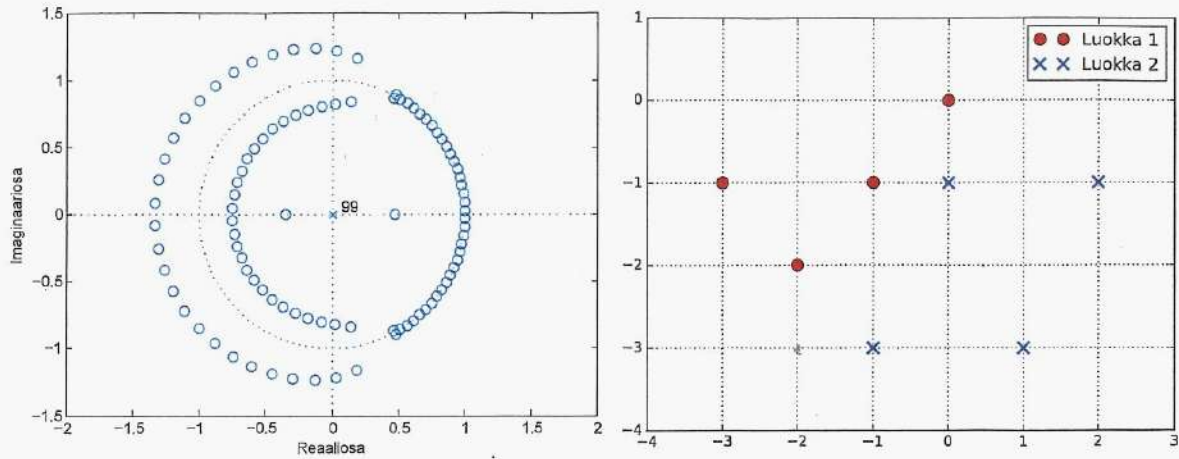
3. Oletetaan, että kausaalisen LTI-järjestelmän heräte $x(n)$ ja vaste $y(n)$ toteuttavat seuraavan differenssiyhtälön:

$$y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) + x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2).$$

(a) Määritä järjestelmän siirtofunktio $H(z)$.

(b) Piirrä napa-nollakuvio.

(c) Onko järjestelmä stabiili? Miksi / miksi ei?



Kuva 1: Vasen: Tehtävän 2 napanollakuvio. Oikea: Tehtävän 5 aineisto.

4. Suunnittele ikkunamenetelmällä alipäästösuodin (selvitä käsin impulssivasteen lauseke), jonka vaatimukset ovat seuraavat:

Estokaista	[12 kHz, 16 kHz]
Päästökaista	[0 kHz, 9 kHz]
Päästökaistan maksimivärähtely	0.06 dB
Estokaistan minimivaimennus	34 dB
Näytteenottotaajuus	32 kHz

Käytä oheisia taulukoita hyväksesi.

5. (a) Suunnittele Fisherin lineaarinen erottelija (LDA) kuvan 1 (oikea) datalle. Ilmoita ratkaisu muodossa

$$\text{Näytteen } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ luokka} = \begin{cases} 1, & \text{jos } \boxed{\text{jotain}} \\ 2, & \text{muutoin} \end{cases}$$

Luokkien kovarianssimatriisit ovat:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (b) Kuinka näyte $\mathbf{x} = (-2, -3)$ luokituu?

Suppose two classes of observations have means $\bar{\mu}_{y=0}, \bar{\mu}_{y=1}$ and covariances $\Sigma_{y=0}, \Sigma_{y=1}$. Then the linear combination of features $\bar{w} \cdot \bar{x}$ will have means $\bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=i}$ and variances $\bar{w}^T \Sigma_{y=i} \bar{w}$ for $i = 0, 1$. Fisher defined the separation between these two distributions to be the ratio of the variance between the classes to the variance within the classes:

$$S = \frac{\sigma_{between}^2}{\sigma_{within}^2} = \frac{(\bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=1} - \bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=0})^2}{\bar{w}^T \Sigma_{y=1} \bar{w} + \bar{w}^T \Sigma_{y=0} \bar{w}} = \frac{(\bar{w} \cdot (\bar{\mu}_{y=1} - \bar{\mu}_{y=0}))^2}{\bar{w}^T (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1}) \bar{w}}$$

This measure is, in some sense, a measure of the signal-to-noise ratio for the class labelling. It can be shown that the maximum separation occurs when

$$\bar{w} = (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1})^{-1} (\bar{\mu}_{y=1} - \bar{\mu}_{y=0})$$

When the assumptions of LDA are satisfied, the above equation is equivalent to LDA.

Be sure to note that the vector \bar{w} is the normal to the discriminant hyperplane. As an example, in a two dimensional problem, the line that best divides the two groups is perpendicular to \bar{w} .

Generally, the data points to be discriminated are projected onto \bar{w} ; then the threshold that best separates the data is chosen from analysis of the one-dimensional distribution. There is no general rule for the threshold. However, if projections of points from both classes exhibit approximately the same distributions, the good choice would be hyperplane in the middle between projections of the two means, $\bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=0}$ and $\bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=1}$. In this case the parameter c in threshold condition $\bar{w} \cdot \bar{x} < c$ can be found explicitly:

$$c = \bar{w} \cdot (\bar{\mu}_{y=0} + \bar{\mu}_{y=1}) / 2$$

A more condensed form of the difference equation is:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{i=0}^P b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^Q a_j y[n-j] \right)$$

which, when rearranged, becomes:

$$\sum_{j=0}^Q a_j y[n-j] = \sum_{i=0}^P b_i x[n-i]$$

To find the transfer function of the filter, we first take the Z-transform of each side of the above equation, where we use the time-shift property to obtain:

$$\sum_{j=0}^Q a_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^P b_i z^{-i} X(z)$$

We define the transfer function to be:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^Q a_j z^{-j}}$$

Considering that in most IIR filter designs coefficient a_0 is 1, the IIR filter transfer function takes the more traditional form:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^Q a_j z^{-j}}$$

Inversion of 2x2 matrices

[edit]

The cofactor equation listed above yields the following result for 2x2 matrices. Inversion of these matrices can be done easily as follows:[2]

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Suodintyyppi	Impulssivaste kun	
	$n \neq 0$	$n = 0$
Alipäästö	$2f_c \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$2f_c$
Ylipäästö	$-2f_c \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$1 - 2f_c$
Kaistanpäästö	$2f_2 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_2) - 2f_1 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_1)$	$2(f_2 - f_1)$
Kaistanesto	$2f_1 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_1) - 2f_2 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_2)$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

Ikkuna-funktion nimi	Siirtymäkaistan leveys (normalisoitu)	Päästökaistan värähtely (dB)	Estokaistan minimivaimennus (dB)	Ikkunan lauseke $w(n)$, kun $ n \leq (N-1)/2$
Suorakulmainen	$0.9/N$	0.7416	21	1
Bartlett	$3.05/N$	0.4752	25	$1 - \frac{2 n }{N-1}$
Hanning	$3.1/N$	0.0546	44	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	53	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	74	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$