MAT-01410 ja MAT-10430 Insinöörimatematiikka A4 ja C4

Tentti 9.5.2017 / Kimmo Vattulainen

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. a) Mikä on käyrän

$$\mathbf{r}(t) = (t-2, -t^2+2, 2t^2-3t)$$

pisteeseen $(-1, 1, -1)$ piirretyn tangenttisuoran parametrimuotoinen yhtälö?
b) Missä pisteissä tämä tangenttisuora leikkaa yksikköpallopinnan $x^2+y^2+z^2=1$

2. a) Yhdistetyistä funktioista $F \circ G$ ja $G \circ F$ vain toinen voidaan muodostaa. Muodosta se ja laske sen derivaattamatriisi, kun

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 \\ x^2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad G(x,y,z) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ xy \end{bmatrix}$$

b) Mikä on **a**)-kohdan yhdistetyn funktion linearisointi pisteessä $x=1,\ y=1$?

3. Määritä funktion $f(x,y) = x^3+y^2-2xy$ kriittiset pisteet ja tutki ovatko minimi-, maksimi- vai satulapisteitä.

4. a) Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittaa ylhäältä pinta $z=2y^2$ ja alhaalta $xy-$tason kolmiojoukko A, jonka kärkipisteinä ovat pisteet $(-3,-1), (3,-1), (0,2)$
b) Kappaleen tilavuutta halutaan pienentää yhden tilavuusyksikön verran poraamalla reikä kappaleen läpi siten, että reiän keskiakseli on $z-$akselin suuntainen ja kulkee origon kautta. Mikä reiän halkaisijan pitäisi olla?
Vihje: $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta)),\ \cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$

Insinöörimatematiikka 4
Kaavakokoelma

1.
$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

2.
$$(G \circ F)'(\mathbf{x}) = G'(F(\mathbf{x}))F'(\mathbf{x})$$

3.
$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$$

4.
$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

5.
$$T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

6.
$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H\, f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

7.
$$P_m(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b)$$

8.
$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

9.
$$\iint_R f(x, y)\; dx\; dy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\; dr\; d\theta$$

10.
$$\iiint_T f(x, y, z)\; dV$$
$$= \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\; d\rho\; d\theta\; d\phi$$

11.
$$m = \iiint_T \rho\; dV, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\rho\; dV, \quad I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\rho\; dV$$

12.
$$\iint_A f(x, y)\; dxdy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|\; du\; dv$$

13.
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$$

14.
$$\int f'(g(t))g'(t)\; dt = f(g(t)) + C$$
$$\int u(x)v'(x)\; dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\; dx + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\; dx = \ln|f(x)| + C$$