

MAT-01430 Insinöörimatematiikka C 4 / Hirvonen
Tentti 03.05.2018

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkkä lopputuloksen ilmoittaminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädyit.

1. Eräessä avaruuden \mathbb{R}^3 alueessa sähkökentän potentiaali on kaavan

$$V(x, y, z) = x^2 + yz + xyz$$

mukainen. Tarkastellaan pistettä $P = (1, 1, -1)$.

- Kun pisteestä P ollaan lähtemässä kohti pistettä $Q = (4, 5, 4)$, mikä on suuntavektori ja mikä on potentiaalin hetkellinen muutosnopeus ko. suuntaan?
 - Mihin suuntaan pisteestä P lähdetessä potentiaalin muutosnopeus on suurin ja kuinka suuri se silloin on?
 - Anna jokin suunta, johon pisteestä P lähdetessä potentiaali ei muutu.
2. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4y + 3$ suurin ja pienin arvo joukossa, jota rajaavat paraabeli $y = 1 - x^2$ ja x -akseli.
3. Tarkastellaan funktioita $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}, \quad G(x, y) = \begin{bmatrix} ye^x \\ x^2y \end{bmatrix}.$$

Merkitään $S(x, y) = (F \circ G)(x, y)$ ja $f(x, y)$ on funktion $S(x, y)$ ensimmäinen komponenttifunktio.

- Etsi funktion $S(x, y)$ derivaattamatriisi käyttäen ketjusääntöä.
 - Selvitä $H_f(0, 1)$ eli funktion $f(x, y)$ Hessen matriisi pisteessä $(0, 1)$.
4. Tarkastellaan integraalia

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 \sqrt{x^2 + y^2} dy dx.$$

- Esitä vaihdetussa integrointijärjestyksessä. Älä laske integraalia.
- Muunna napakoordinaatteihin ja laske integraali.

Insinöörimatematiikka C 4, kaavakokoelma

1. $T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

2. $(F \circ G)'(\mathbf{x}) = F'(G(\mathbf{x}))G'(\mathbf{x})$

3. $F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

4. $\iint_R f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$

5. $\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

6. $m = \iiint_T \delta dV, \quad \bar{x} = \iiint_T x \delta dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \delta dV$

7. $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)), \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$

8. $\int_a^b f'(g(x))g'(x) dx = \int_a^b f(g(x))$

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_a^b \ln |f(x)|$$