



Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.

1. a) Määritä raja-arvo tai osoita, että sitä ei ole olemassa:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

- b) Arvioi funktion  $f(x, y) = x^2e^{3y}$  arvoa pisteessä  $(3.05, -0.1)$  sopivalla lineaarisella approksimaatiolla.

2. Olkoon  $f(x, y, z) = xy + y^2z$  ja  $\mathbf{p} = (4, 2, 0)$ .

a) Pisteestä  $\mathbf{p}$  lähdetään vektorin  $\mathbf{u} = (-2, 3, -6)$  osoittamaan suuntaan. Kasvaako vai väheneekö  $f$ :n arvo? Mikä on hetkellinen muutosnopeus pisteessä  $\mathbf{p}$ ?

b) Mihin suuntaan pisteestä  $\mathbf{p}$  pitäisi lähteä, jotta  $f$  vähenisi mahdollisimman nopeasti? Mikä olisi silloin muutosnopeus pisteessä  $\mathbf{p}$ ?

c) Anna jokin suunta, johon lähdeettäessä muutosnopeus on 0.

3. a) Olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^3$ . Laske  $f'(1, 1, \dots, 1)$ .

b) Laske

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx dy.$$

Ohje: integroimisjärjestys?

4. Laske sen joukon tilavuus, jota rajaa alhaalta paraboloidi  $z = x^2 + y^2$  ja ylhäältä pallopinta  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$m = \iiint_T \rho dV, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \rho dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \rho dV$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$$