MAT-02400 Vektorianalyysi / Hirvonen
Tentti 20.05.2015
Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Laske funktion $f(x,y,z) = x+z$ pintaintegraali läpi sylinteripinnan $x^2+y^2 = 9$ sen osan, jolla $y \leq 0$, ja jota rajoittavat xy-taso ja taso $z = 4$.
2. Laske kentän $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3y, yz^2, xz)$ vuo kohti origoa läpi origokeskisen yksikköpallopinnan.
3. Laske funktion $f(x,y) = xy^4 + y$ käyräintegraali yli käyrän $x^2 + y^2 = 4$, jossa $x \leq 0$, kuljettuna alhaalta ylöspäin.
4. Laske työ, jonka kenttä $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x + yz, xz, xy)$ tekee, kun massapiste siirtyy kentässä ensin pitkin janaa pisteestä $(0,1,2)$ pisteeseen $(1,2,-1)$ ja sieltä pitkin janaa origoon.

MAT-02400 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

1. $\mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \nabla r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla \bullet \mathbf{r} = 3$

2. $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$
$\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$
$\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$
$\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

3. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

4. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \bullet \mathbf{F}\, dx\, dy$$

5. $$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV$$

6. $$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, dS$$

7. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin\phi\, (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi), \quad \|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin\phi$

9. Massa ja massakeskipiste. Käyrälle C:

$$m = \int_C \delta\, ds, \quad \overline{x} = \frac{1}{m} \int_C x\delta\, ds, \quad \overline{y} = \frac{1}{m} \int_C y\delta\, ds, \quad \overline{z} = \frac{1}{m} \int_C z\delta\, ds.$$

Pinnalle S:

$$m = \iint_S \delta\, dS, \quad \overline{x} = \frac{1}{m} \iint_S x\delta\, dS, \quad \overline{y} = \frac{1}{m} \iint_S y\delta\, dS, \quad \overline{z} = \frac{1}{m} \iint_S z\delta\, dS.$$

10. $\sin(2t) = 2\sin t \cos t, \qquad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$