MAT-02600 Diskreetti matematiikka

Tentti 17.10.2013 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle peräkkäin neljä neliötä a' 2×2.

1. **(a)** Osoita todeksi tai vastaesimerkillä vääräksi, että jokaista kokonaislukua n kohti

$$\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor .$$

(b) Määritä $\mathcal{Z}\big(\{x_{k+1} + 4x_{k-2}\}\big)$, kun $x_k = 3^k \cos\big(k\pi/3\big)$.

2. Etsi reaaliset käänteismuunnokset $\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$, kun

(a) $Y(z) = \dfrac{5z}{\big(3z-1\big)} + 2$

(b) $Y(z) = \dfrac{15z}{\big(3z-1\big)\big(5z-2\big)}$

(c) $Y(z) = \dfrac{4z}{9z^2+1}$

3. **(a)** Mikä on pienin positiivinen jakojäännös, kun jaetaan luvulla 15 luku

$$14^{2013} + 2013^{15} \cdot 1305 + 3^{145}.$$

(b) Etsi kaikki sellaiset kokonaisluvut n, jotka toteuttavat samanaikaisesti seuraavat 3 kongruenssiyhtälöä

$$n \equiv 3 \mod 7, \quad n \equiv 6 \mod 11, \quad n \equiv 2 \mod 13.$$

4. **(a)** Osoita, että jokaista kokonaislukua m kohti

$$m^{31} \equiv m \mod 77.$$

(b) Graafi $G = (V, E)$, missä $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_8\}$ ja

$$E = \{(v_1, v_6), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_2, v_7), (v_3, v_8), (v_4, v_7), (v_5, v_8), (v_7, v_8)\}.$$

i) Suorita syvyyssetsintä graafille G aloittaen pisteestä v_3. Esitä selkeästi etsinnän järjestys ja lopuksi DFS-puu havainnollisesti kuvana.
ii) Mitä on $d(v_3)$?

MAT-02600 Diskreetti matematiikka

Kaavakokoelma

Taulukko z-muunnoksista.

$x_k = ka^{k-1}$, a on vakio	$X(z) = \dfrac{z}{(z-a)^2}$,	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$x_k = \cos(k\omega T)$, ω, T ovat vakioita	$X(z) = \dfrac{z\big(z-\cos(\omega T)\big)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$,	$\lvert z\rvert > 1$
$x_k = \sin(k\omega T)$, ω, T ovat vakioita	$X(z) = \dfrac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$,	$\lvert z\rvert > 1$

Ominaisuudet:

1. $\mathcal{Z}\big(\{x_{k-k_0}\}\big) = \frac{1}{z^{k_0}}\mathcal{Z}\big(\{x_k\}\big)$
2. $\mathcal{Z}\big(\{x_{k+k_0}\}\big) = z^{k_0}X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$
3. $\mathcal{Z}\big(\{a^k x_k\}\big) = X(z/a)$
4. $\mathcal{Z}\big(\{k^n x_k\}\big) = \big(-z\frac{d}{dz}\big)^n X(z)$
5. $\mathcal{Z}\big(\{(x * y)_k\}\big) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{p=0}^{k} x_p y_{k-p}\right\}\right) = X(z)Y(z)$