

# Tentti(1) MAT-02650 Algoritmimatematiikka

2.5. 2018 Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. HUOM. Tehtävät EIVÄT ole vaikeusjärjestyksessä!

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

1. (a) (3 pistettä) Tarkastellaan joukossa  $\mathbb{Z}$  relaatiota  $R$ , jolle pätee  $aRb$  jos ja vain jos  $a + b$  on parillinen. Osoita, että relaatio  $R$  on ekvivalenssirelaatio ja anna relaation  $R$  määräämät ekvivalenssiluokat.

- (b) (3 pistettä) Käytä tunnettuja ekvivalenssirelaatioita apunasi ja muuta lause

$$((\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)) \vee \neg(p \vee q)$$

täyteen (täydelliseen) disjunkttiiviseen normaalimuotoon (DNF).

2. Vastaa lyhyesti (kyllä/ei) kohtien (a)-(f) kysymyksiin. Jokaisen kohdan oikeasta vastauksesta saat yhden pisteen, väärästä vastauksesta vähennetään puoli (1/2) pistettä ja vastaamatta jättäminen on nolla pistettä. Tehtävän kokonaispistemäärä ei kuitenkaan mene negatiiviseksi.

Tarkastellaan funktiota

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 2n^2 - 10n$$

- (a) Onko lause  $\exists c \in \mathbb{R}, \forall n > 2 : f(n) \leq cn^2$  tosi?  
(b) Onko lause  $\exists n > 2, \forall c \in \mathbb{R} : f(n) \leq cn^2$  tosi?  
(c) Onko lause  $f(n) \geq n^2$ , kun  $n > 2$ , tosi?  
(d) Onko  $f(n) = O(n^2)$ ?  
(e) Onko  $f(n) = \Omega(n^2)$ ?  
(f) Onko  $f(n) = o(n^2)$ ?

3. (a) (3 pistettä) Esitä funktio

$$f(y) = \tan(y^2 - y)$$

prefix- eli ulkomuodossa (muuttuja/muuttujat annetaan vain kerran).

- (b) (3 pistettä) Olkoot  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle\}$  ja  $S = \{\langle a, a \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$  relaatioita joukossa  $\{a, b, c\}$ . Muodosta yhdistetylle relaatiolle  $R \circ S$  refleksiivinen sulkeuma  $r(R \circ S)$ , symmetrinen sulkeuma  $s(R \circ S)$  ja transitiivinen sulkeuma  $t(R \circ S)$ .

4. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$\left( \neg(A \wedge B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (B \vee C) \right) \rightarrow (A \rightarrow D)$$

on pätevä teoria.

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.