

## Insinöörimatematiikka D 1

Tentti 2.2.2009

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia.

Kurssilla esiintyneitä kaavoja:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}, \quad \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}, \quad \delta = \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{p})$$

1. (a) Tarkastellaan kahta loogista lausetta:  
 $a$  : "Jos ei ole pakkasta, niin en käytä huopatossuja."  
 $b$  : "En käytä huopatossuja tai on pakkasta."  
Näiden voidaan ajatella muodostuvan atomilauseista, joita on yhdistetty loogisilla konnektiiveilla. Nimeä nämä atomilauseet jotenkin ja esitä lauseet  $a$  ja  $b$  atomilauseiden sekä konnektiivien avulla. Sen jälkeen osoita totuustaululla, että  $a \Leftrightarrow b$  on tautologia.
- (b) Ovatko seuraavat lauseet tosia vai epätosia?
  - i.  $\forall x > 0 \exists y \in \mathbb{N} : \sin(\ln x) > y$
  - ii.  $\forall x > 0 \exists y \in \mathbb{R} : y^2 < x$
2. Pisteet  $A = (1, 2, 3)$  ja  $B = (5, 2, 6)$  ovat suoralla  $l \subset \mathbb{R}^3$ .
  - (a) Laske vektorin  $[0 \ 1 \ 2]^T$  projektio suoran  $l$  suuntaiselle vektorille.
  - (b) Anna sen tason  $ax + by + cz = d$  yhtälö, joka on kohtisuorassa suoran  $l$  kanssa ja kulkee pisteen  $C = (1, 1, 1)$  kautta. Kulkeeko tämä taso origon kautta?  
Vihje: Mikä on tason normaali?
3. Tarkastellaan kohdissa (a) ja (b) kompleksilukua  $z = -j$ .
  - (a) Mitä ovat tässä tapauksessa  $\text{Re } z$ ,  $\text{Im } z$ ,  $\bar{z}$  ja  $|z|$ ?
  - (b) Esitä luku  $z$  napakoordinaattimuodossa.
  - (c) Ratkaise yhtälö  $(2 - 3j)z - 8j = (j - 2)^2$ . Esitä ratkaisu muodossa  $z = a + bj$ , missä  $a, b \in \mathbb{R}$ .
4. Käytä molemmissa seuraavista kohdista Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmää.
  - (a) Tarkastellaan yhtälöparia
$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases},$$
missä  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . Anna tähän yhtälöpariin liittyvän kerroinmatriisin avulla esimerkki jokaisesta eliminointimenetelmän perusoperaatiotyypistä.
  - (b) Millä tavalla vakion  $k$  valinta vaikuttaa seuraavan yhtälöryhmän ratkaisujen määrään?
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ -x + ky + z = 2 \\ 3x + 6y + z = 6 \end{cases}.$$