TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Insinöörimatematiikka D 4
Tentti (9.4.2010)

- Kynä ja paperi, numeeriset vastaukset tarkoilla arvoilla
- Laske tehtävät 1 ja 2 yhdelle paperille sekä tehtävät 3 ja 4 toiselle paperille

1. Kappale liikkuu pitkin käyrää

$$\mathbf{x}(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3}, 2t\right).$$

Kun kappale on liikkunut käyrää pitkin origosta 16 pituusyksikköä eteenpäin ($t > 0$), missä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteessä se silloin on?

2. a) Käyrillä

$$\mathbf{r}_1(t) = (t^2 - t, 2t), \qquad \mathbf{r}_2(s) = (-s^2 + 3, 3s + 1)$$

on kaksi leikkauspistettä. Mitkä ne ovat?

b) Osoita, että käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti (siis niiden tangentit ovat kohtisuorassa) kummassakin leikkauspisteessä.

3. a) Laske linearisoimalla pisteessä (1,1) funktion

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$$

avulla likiarvo luvulle $e^{0.4} = e^{1.1^2 - 0.9^2}$.

b) Olkoon lämpötila avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteessä (x, y, z) annettu funktiolla

$$T(x, y, z) = 100 - x^2 - yz.$$

Mikä on lämpötilan muutosjyrkkyys kun siirrytään pisteestä $(-1, 2, 3)$ suuntaan $\mathbf{a} = (-12, 3, 4)$? Jos lämpötilan yksikkö on K ja pituuden m, millaiset dimensiokertoimet täytyy kirjoittaa funktion T termeihin?

4. Etsi funktion

$$f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$$

suurin ja pienin arvo siinä suljetussa ja rajoitetussa kolmiojoukossa, jota rajoittavat suorat $x = 0$, $y = 0$ ja $x + y = 1$.

Insinöörimatematiikka D 4 (2010), sekalaisia kaavoja ja muuta sälää

1. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3}$

2. $s = \displaystyle\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$

3. $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \dfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

4. $H f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 D_1 f(\mathbf{x}) & D_1 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1 D_n f(\mathbf{x}) \\ D_2 D_1 f(\mathbf{x}) & D_2 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2 D_n f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(\mathbf{x}) & D_n D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_n D_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

5. $f(a+h, b+k) \approx \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a,b)$

6. $\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$

7. $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \end{cases}$

8. $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ A^T A \mathbf{b} = A^T \mathbf{y}$