MAT-10424 Insinöörimatematiikka D2 u

Tentti 08.04.2013 / Kimmo Vattulainen

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Pisteiden $(2,0,1)$ ja $(3,1,3)$ yhdysjanan keskipisteen kautta asetetaan taso, joka on kohtisuorassa yhdysjanaa vastaan. Missä pisteessä tämä taso leikkaa y−akselin?

2. Millä vakioiden $a,\ b \in \mathbb{R}$ arvoilla yhtälöryhmällä
a) on yksikäsitteinen ratkaisu? Esitä ratkaisu.
b) on äärettömän monta ratkaisua? Esitä ratkaisu.
c) ei ole lainkaan ratkaisua?

$$\begin{cases} x+y+5z &= 1 \\ -x \qquad -2z &= 3 \\ x+y+az &= b \end{cases}$$

3. Olkoon matriisi.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Laske seuraavat kohdat. Laita välivaiheet ja perustelut näkyviin.
a) $\det(A)$
b) $\operatorname{rank}(A)$
c) $(I-A^{-1})(I+A+A^2)+(A^{-1})^T$

4. Muodosta yksi 2×2−matriisi, jonka yksikään alkio ei ole 0 ja jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = 3$. Mitkä ovat vastaavat ominaisvektorit?

MAT-10422/MAT-10424 Insinöörimatematiikka B2 u/ D2 u, kaavoja

1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$

2. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$

3. $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

4. $\operatorname{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}$

5. $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$

6. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

7. $(AB)^T = B^TA^T,\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

8. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

9. $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},\ A = \begin{bmatrix} L(\mathbf{e}_1) & L(\mathbf{e}_2) & \cdots & L(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$

10. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$

11. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},\ \det(A-\lambda I) = 0$

12. $S^{-1}AS = D \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$

13. $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$