MAT-10444 Insinöörimatematiikka D4 u

Tentti 7.10.2013 / Kimmo Vattulainen

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. a) Missä pisteessä käyrä $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1,\ -t^3 + 2t + 2)$ leikkaa itsensä.
b) Missä pisteissä tämän käyrän tangenttisuora on x-akselin suuntainen.

2. Muodosta funktion

$$f(x, y, z) = e^{-xyz}$$

linearisointi pisteessä $(1, 0, -2)$ ja laske sen avulla likiarvo funktion arvolle pisteessä $(1.02, 0.03, -2.02)$.

3. Mikä on funktion

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$$

pienin ja suurin arvo siinä suljetussa ja rajoitetussa tasojoukossa, jota rajoittavat paraabeli $y = 4 - x^2$ ja $x-$akseli?

4. Laske

$$\iint_A \frac{x}{y}\, dydx$$

kun joukko A on kolmio kärkipisteinään $(0, 0), (0, 2), (2, 4)$.

MAT-10444 Insinöörimatematiikka D 4u
Kaavakokoelma

1.
$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

2.
$$(G \circ F)'(\mathbf{x}) = G'(F(\mathbf{x}))F'(\mathbf{x})$$

3.
$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$$

4.
$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

5.
$$T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

6.
$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H\, f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

7.
$$P_m(x,y) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)$$

8.
$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

9.
$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

10.
$$\iiint_T f(x,y,z)\, dV = \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

11.
$$m = \iiint_T \rho\, dV, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\rho\, dV, \quad I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\rho\, dV$$

12.
$$\iint_A f(x,y)\, dxdy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$$

13.
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$$

14.
$$\int f'(g(t))g'(t)\, dt = f(g(t)) + C$$
$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$