

MAT-13430 Laaja matematiikka 3

Tentti 17.05.2010

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Olkoon funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä $x = 0$. Osoita, että silloin

on kaikilla $a \in \mathbb{R}$ voimassa:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax^2) - f(0)}{x} = 0.$$

2. Mitkä seuraavista väittämistä ovat tosia, mitkä eivät:

a) Jos jono $\{a_n\}$ suppenee, niin myös jono $\{a_n\}$ suppenee.

b) Monotonisen jonon jokainen osajono on monotoninen.

c) Jos $f^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva.

d) Jos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, niin $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

e) Jos funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä x_0 , niin se on jatkuva pisteessä x_0 .

f) Jos $f^2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva, niin $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva.

3. Tarkastellaan polynomia $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Montako reaalijuurta f :llä on?

b) Mikä on funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arvojoukko $A = f(\mathbb{R})$?

c) Osoita, että funktiolla $f: \mathbb{R} \rightarrow A$ on käänteisfunktio $f^{-1}: A \rightarrow \mathbb{R}$.

d) Laske derivaatta $(f^{-1})'(4)$.

4. a) Tutki, suppeneeko integraali $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$ ja myönteisessä tapauksessa laske sen arvo.

b) Pitääkö paikkansa: $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{8}$? Ellei, niin korjaa ja selvitä tilanne.

5. Tutki alla olevista sarjoista, onko kyseessä suppeneva, itseisesti suppeneva, ehdollisesti suppeneva vai hajaantuva sarja:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + 1}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{k^2 + 1}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.