

MAT-13440 Laaja matematiikka 4

Tentti 09.04.2010

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!
Perustele kaikki väitteesi!

1. Osoita oikeaksi tai vääräksi:

- a) Jos joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ei ole avoin, se on suljettu.
- b) Jos joukon $S \subseteq \mathbb{R}^n$ reuna on tyhjä: $\text{bd}(S) = \emptyset$, niin S on suljettu.
- c) Jos joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on avoin ja joukko $B \subseteq \mathbb{R}^n$ suljettu, niin niiden leikkaus $A \cap B$ ei voi olla avoin.
- d) Jos joukko $S \subseteq \mathbb{R}^n$ on suljettu ja joukko $T \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakti, niin leikkaus $S \cap T$ on kompakti.
- e) Jos jonolla $\{\mathbf{x}_k\}$, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, on suppeneva osajono, niin jono $\{\mathbf{x}_k\}$ on suppeneva.
- f) Jos funktio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja jono $\{\mathbf{x}_k\}$ on hajaantuva, niin jono $y_k = f(\mathbf{x}_k)$ on hajaantuva.

2. Tutki, onko funktiolla $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

raja-arvo, kun $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$? Myönteisessä tapauksessa laske kyseinen raja-arvo.

3. a) Laske funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^3$ gradientti $\nabla f(\mathbf{x})$.
b) Olkoon A symmetrinen kokoa $n \times n$ oleva vakiomatriisi. Laske funktion $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ derivaatta $g'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

4. Laske yhdistetyn kuvauksen $g \circ f$ derivaatta (Jacobin matriisi) pisteessä $(1,1)$, kun

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x + y^3 \\ x^2 - y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u^8 v^2 + \sqrt{w} \\ u/w^4 \end{bmatrix}.$$

5. Hae funktion $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$ suurin ja pienin arvo neliössä $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.