

MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 01.11.2010

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Laske integraali $\iint_R xy \, da$, missä R on käyrien $y = x^3$ ja $x = y^2$ rajaama \mathbb{R}^2 :n alue.

2. Laske sen kappaleen $S \subseteq \mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ tilavuus, jota rajoittavat koordinaattitasot $x = 0, y = 0, z = 0$, taso $y = x$ ja pinta $z = 1 - x^2$.

3. Tarkastellaan funktiota $y(x)$ koskevaa differentiaaliyhtälöä

$$y' = \frac{xy}{x^2 + 1}.$$

a) Mitä seuraavista tyypeistä yhtälö on: lineaarinen, ensimmäistä kertalukua, vakiokertoiminen, homogeeninen, separoituva?

b) Hae yhtälölle sellainen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 2$.

4. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, kun $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Hae yhtälön yleinen ratkaisu.

b) Ratkaise yhtälö alkuarvolla $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$.

c) Onko systeemi $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ tasapainopisteessään stabiili?

5. Muunna funktioita $y(t), u(t)$ koskeva alkuarvoprobleema

$$\begin{cases} y'' - u'' + y' - 2u' - y + u = 1 \\ y'' + u'' + 2y' - u' - 2y = e^t \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, u(0) = 0, u'(0) = -1. \end{cases}$$

differentiaaliyhtälösystemin (normaaliryhmän) alkuarvoprobleemaksi

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$