

MAT-13530 Laaja matematiikka 3u / SILVENNOINEN
 Tentti 04.03.2013

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!
 Kaavakokoelma jaetaan!

1. Laske oheiset integraalit:

a) $\int_0^1 x \ln(x+3) dx$, 2p

b) $\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} dx$, 3p

2. a) Tutki suppeneeko integraali

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$$
 1p

ja myönteisessä tapauksessa laske sen arvo.

b) Ratkaise funktiota $y(x)$ koskeva alkuarvotehtävä

$$(x^2 + 1)y' = xy, \quad y(0) = 3.$$
 2p

3. a) Hae differentiaaliyhtälön

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

yleinen ratkaisu.

b) Hae ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. a) Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$. 1p

b) Tutki, onko sarja $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{k^3 + 1}$ suppeneva, itseisesti suppeneva, ehdollisesti suppeneva vai hajaantuva.

5. a) Määritä kaikki pisteet $x \in \mathbb{R}$, joissa potenssisarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^k}{k^4} x^k$ suppenee. 1p

b) Muodosta funktion $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ Taylorin sarja x :n potensseina (6 ensimmäistä termiä riittää).

c) "Seuraavassa on lyhyt Matlab scripti ja sen tuloste. Kerro yksityiskohtaisesti, mitä scripti tekee, ja tämän jälkeen selitä, miksi tuloste on sellainen kuin se on.

Scripti:

2p

f = @(x) sin(x) + sin(2*x);
 S = quad(f, -8*pi, 8*pi)

Tuloste:

S =

6.6613e-16".

(Tehtävät 5b ja 5c ovat vaihtoehtoiset, eli ratkaise niistä toinen. Voit ratkaista myös molemmat, jolloin parempi suoritukseksi otetaan huomioon.)



MAT-13530 Laaja matematiikka 3u
TTY 2013

Kaavakokoelma

Integraalikaavoista on jätetty integroimisvakio merkitsemättä.

$$1. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

$$2. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$3. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{ar sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$$

$$7. \int \sinh x dx = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$8. \int \cosh x dx = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$9. \int R(\cos x, \sin x) dx \quad \tan \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$10. \int_1^{\infty} 1/x^p dx < \infty \Leftrightarrow p > 1$$

$$11. \int_0^1 1/x^p dx < \infty \Leftrightarrow p < 1$$

$$12. x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}b(s)ds.$$

$$13. a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \sin(\omega t + \phi), \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \phi = \frac{b}{A}, \quad \sin \phi = \frac{a}{A}$$

$$14. f_k \xrightarrow{tas} f \Leftrightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f(x) - f_k(x)| = 0$$

$$15. R = \frac{1}{L}, \quad L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}, \quad L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

$$16. (1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}x^k \quad -1 < x < 1$$

$$17. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$18. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$19. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$