

MAT-13540 Laaja matematiikka 4u

Tentti 2011-05-09

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!
Perustelee kaikki väitteesi!

1. Osoita oikeaksi tai vääräksi:

a) Jos jonot (\mathbf{x}_k) ja (\mathbf{y}_k) ovat \mathbb{R}^n :n suppenevia jonoja ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}, \quad \text{niin } \|\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ kaikilla } k.$$

b) Äärellisen joukon $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ komplementti on avoin.

c) Funktion $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

raja-arvo $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} f(\mathbf{x}) = 0$.

2. Laske yhdistetyn kuvauksen $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ derivaatta (Jacobin matriisi)
pisteessä $(1,0)$, kun

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x^2 - y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(u, v, w) = \begin{bmatrix} u^{10}v + w^2 \\ u - v^{10} \end{bmatrix}.$$

3. Hae funktion $f(x, y) = 2x^2 - y^3 - 2xy$ kriittiset pisteet ja tutki niiden laatu (eli että ovatko lokaaleja maksimi- vai minimikohtia vai satulapisteitä).

4. Laske integraali $\iint_{\Omega} (x+y)e^{x+y} da$, kun Ω on kolmio, jonka kärkipisteet ovat $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(0,1)$.

Käännä!

5. Olkoon A tetraedri, jonka kärjet ovat $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$.

Laske avaruusintegraali $\iiint_A xy \, dv$.