

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Olkoon T -jaksoisella funktiolla $f(t)$ Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$ ja missä kertoimet ovat toistaiseksi tuntemattomia. Johda eli päätele kertoimelle a_1 tai b_1 (kumpi lieneekin tullakseen) laskukaava seuraavasti: integroi yhtälö

$$f(t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2}a_0 \cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) \cos(\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \cos(\omega t))$$

puolittain $\int_{-T/2}^{T/2} \dots dt$ ja oletta, että yhtälön oikea puoli saadaan integroida

yhteenlaskettava kerrallaan. Päätele jokaiselle oikean puolen integraalille arvo hyödyntäen integroitavan parittomuus ja jo(i)tain seuraavista:

$$2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$

$$2 \cos(a) \sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b).$$

2. Funktio $f(t) = \sin(t)$ ($-\pi/2 \leq t < \pi/2$) jatketaan π -jaksoiseksi. Hahmottele sen kuvaajaa. Laske funktion $f(t)$ (jatketun version) Fourier-sarjan kompleksiversiolla kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \left(\int_d^{d+T} f(t) \cos(n\omega t) dt - j \int_d^{d+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \right)$$

hyödyntäen funktion parillisuutta tai parittomuutta sekä jotain tehtävän 1 kaavoista, ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Helppottava voi olla myös $\sin(x-y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$.

Käännä!

3. Olkoon $c > 0$. Laske Fourier-muunnoksen määritelmästä

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

lähtien muunnos pulssille

$$\text{a) } f_a(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ 2e^{-ct} & (t > 0) \end{cases} \quad \text{b) } f_b(t) = \begin{cases} -e^{ct} & (t \leq 0) \\ e^{-ct} & (t > 0) \end{cases}$$

Yhdessä kirjassa "ideoidaan" uusia Fourier-muunnopareja katsomalla, mitä tapahtuu funktioille ja niiden muunnoksille, kun $c \rightarrow 0+$.

c) Mitkä ovat a-kohdassa funktion $f_a(t)$ ja sen muunnoksen $F_a(j\omega)$ raja-arvofunktiot, kun $c \rightarrow 0+$?

b) Mitkä ovat b-kohdassa funktion $f_b(t)$ ja sen muunnoksen $F_b(j\omega)$ raja-arvofunktiot, kun $c \rightarrow 0+$?

Kommentti: Jos laskit oikein, niin sait saman raja-arvofunktion kummallekin Fourier-muunnokselle. Tuon kirjan ideoinnissa on siis pakko olla jotain vikaa. Fourier-muunnoksen käänteismuunnos ei nimittäin voi olla kaksi eri funktiota samanaikaisesti.

4. Olkoon $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$. Päätele Fourier-muunnos funktiolle

$$f(t) \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)$$

seuraavasti: esitä trigonometrinen funktio eksponenttifunktion avulla, käytä lineaarisuutta ja taajuussiirto-ominaisuutta (yksi alla luetelluista).

Tiedetään, että
$$e^{jx} = \cos x + j \sin x,$$

joten
$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x \quad \text{ja} \quad e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x \quad \text{ja} \quad e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x.$$

Ominaisuuksia: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{jat}f(t)\} = F(j(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega)$.