$x_m \longrightarrow \boxed{z^{-k}} \longrightarrow x_{m-k}$

MAT-20600 Diskreetti matematiikka

Tentti 19.3.2008

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
- Kirjoita konsepteihin DiMa, nimesi ja numerosi
- Piirrä pääkonseptiin nimen alle neljä neliötä vierekkäin a' 2 × 2.

1. **(a)** Esitä signumfunktion arvot signum(x), $x \in \mathbb{R}$, määrittävä yksi lauseke käyttäen Heavisiden funktiota (siis ei paloittain määritystä).

(b) Osoita todeksi tai kumoa väite, että $n = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil + \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$, kun n on kokonaisluku.

2. **(a)** Ratkaise kongruenssiyhtälö $43x = 7 \mod 51$ ja sievennä vastauksesi.

(b) Laske

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + p^p \mod p,\ p \in \mathbb{P}.$$

3. **(a)** Etsi z-muunnos jonolle $\{1/4^k - 7\cos(k2\pi/3) - 6\delta_{k-2}\}$.

(b) Etsi käänteismuunnos $\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$, kun $Y(z)$ on

$$\frac{z^2+2z}{3z^2} + \frac{3z}{(6z+1)(4z-1)}.$$

4. **(a)** Muunna z-muunnoksien yhtälöksi muotoon $Y(z) = H(z)X(z)$ differenssiyhtälö

$$2y_k - 3y_{k-1} + 4y_{k-2} = x_k + 5x_{k-1}, \text{ kun } x_k = 6k - 7.$$

(b) Graafin $G = (V, E)$ vieruspistematriisi on $n \times n$-matriisi D, missä n on G:n pisteiden lukumäärä, $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ja matriisin alkio

$$d_{ij} = \text{pisteitä } v_i \text{ ja } v_j \text{ yhdistävien viivojen lukumäärä.}$$

Tutki, onko graafi yhtenäinen suorittamalla syvyysetsintä aloittaen pisteestä v_5 graafille, jonka vieruspistematriisi on

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esitä selkeästi etsinnän järjestys ja lopuksi DFS-puu havainnollisesti kuvana.

2 1 0 3 4 4 2 2

Käännä!

$x_m \longrightarrow \boxed{z^{-k}} \longrightarrow x_{m-k}$

MAT-20600 Diskreetti matematiikka

Kaavakokoelma tentissä 2008

Taulukko z-muunnoksista.

$x_k = ka^{k-1}$, a on vakio	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$x_k = \cos(k\omega T)$, ω, T ovat vakioita	$\dfrac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$x_k = \sin(k\omega T)$, ω, T ovat vakioita	$\dfrac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$

Ominaisuudet:

1. $\mathcal{Z}\left(\{x_{k-k_0}\}\right) = \frac{1}{z^{k_0}}\mathcal{Z}(\{x_k\})$

2. $\mathcal{Z}\left(\{x_{k+k_0}\}\right) = z^{k_0}X(z) - \sum_{p=0}^{k_0-1} x_p z^{k_0-p}$

3. $\mathcal{Z}\left(\{a^k x_k\}\right) = X(z/a)$

4. $\mathcal{Z}(\{k^n x_k\}) = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^n X(z)$

5. $\mathcal{Z}(\{(x*y)_k\}) = \mathcal{Z}\left(\left\{\sum_{p=0}^{k} x_p y_{k-p}\right\}\right) = X(z)Y(z)$