

MAT-31080 Kompleksimuuttujan funktiot

1. Välikoe 7.12. 2009 klo 13-15

Ei muistiinpanoja, laskimia, taulukoita.

1. Määrittele käsitteet:

- joukon sisäpiste, reunapiste, ulkopiste
- yhtenäinen joukko
- alue
- jatkuva funktio
- derivoituva funktio
- analyyttinen funktio.

2. Etsi yhtälön

$$z^2 = 1 + i$$

kaikki ratkaisut. Anna ratkaisut sini ja kosini-funktioiden avulla ja hahmottele ratkaisujen sijainti kompleksitasossa.

3. a) Määrittele yleinen eksponenttifunktio z^α , missä z ja α ovat kompleksilukuja.

b) Laske $(2i)^i$.

4. a) Olkoon f alueessa A analyyttinen funktio. Osoita, että sen reaali- ja imaginaariosa toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt.

b) Miten voit päätellä funktion analyyttisyyden Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla.

c) Käyttäen Cauchy-Riemannin yhtälöitä tutki, onko funktio

e^{z^2} analyyttinen ja muodosta Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla sen derivaatta (edellyttäen että derivaatta on olemassa).