

MAT-31090 Matriisilaskenta 1

Välikoe 2 (3.12.2012)

1. Osoita, että Householderin matriisi

$$P = I - 2 \frac{vv^*}{\|v\|^2}$$

(missä $v \neq 0$) on hermiittinen ja unitaarinen.

2. Onko matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

diagonalisoituva? Muodosta sille tilanteen mukaan joko diagonalisointi $A = SDS^{-1}$ tai reaalinen Jordanin kanoninen muoto $A = SJS^{-1}$. (Huom! Tämä tarkoittaa myös similaarisuusmuunnoksen matriisin S etsimistä. Sen inverssiä ei ole pakko laskea.)

3. Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

singulaariarvohajotelma $A = U\Lambda V^*$, ja laske $\|A\|$.

4. (a) Olkoot $P_1, P_2 \in \mathbb{F}^{n \times n}$ siten, että

$$P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2, \quad \text{ja} \quad P_1P_2 = P_2P_1 = O.$$

Osoita, että $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$.

(b) Olkoon $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ projektiomatriisi. Osoita, että $\mathcal{N}(I - P) = \mathcal{R}(P)$.