MAT-31090 Matriisilaskenta 1 / PAUNONEN
Tentti (10.12.2012)

Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, eikä laskimia.

1. Vastaa seuraaviin lyhyesti:
   (a) Olkoon $A = QR$ matriisin $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ QR-hajotelma. Mitkä ovat matriisien Q ja R koot, ja mitä ominaisuuksia niillä on?
   (b) Miten normi $\|A\|$ saadaan matriisin $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ singulaariarvohajotelmasta?
   (c) Olkoon $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Osoita, että $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ jos ja vain jos $AB = BA$.

2. Määrittele matriisinormi $\|A\|$ ja osoita, että $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{F}$.

3. Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

reaalinen Jordanin kanoninen muoto $A = SJS^{-1}$. (Huom! Tämä tarkoittaa myös matriisin S etsimistä. Sen inverssiä ei ole pakko laskea.)

4. Olkoon $\mathcal{S}$ avaruuden $\mathbb{F}^n$ aliavaruus. Määrittele sen ortogonaalikomplementti $\mathcal{S}^\perp$ ja osoita, että $\mathcal{S}^\perp$ on aliavaruus.

5. Olkoon matriisilla $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ominaisarvot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ja niihin liittyvät lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$.

(a) Osoita, että matriisi $A + \mu I$ on ei-singulaarinen jokaisella $\mu \in \mathbb{C}$, joka toteuttaa ehdon

$$\mu \neq -\lambda_i \qquad \text{kaikilla} \quad i = 1, \dots, n.$$

(b) Olkoon A^{-1} olemassa ja olkoon $S \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ei-singulaarinen. Etsi matriisin $B = SA^{-1}S^{-1}$ ominaisarvot ja niihin liittyvät lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit.

MAT-31096 Matrix Algebra 1 / PAUNONEN
Final Exam (10.12.2012)

No books, notes, or calculators.

1. Give short answers to the following questions.
   (a) Let $A = QR$ be the QR-decomposition of a matrix $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. What are the sizes of the matrices Q and R, and what properties do they have?
   (b) How do you get the norm $\|A\|$ from the singular value decomposition of a matrix $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$?
   (c) Assume $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Show that $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ if and only if $AB = BA$.

2. Define the matrix norm $\|A\|$, and show that $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$ for all $\alpha \in \mathbb{F}$.

3. Construct the real Jordan canonical form $A = SJS^{-1}$ of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(Note! This also means finding the matrix S, but you don't have to compute its inverse.)

4. Let $\mathcal{S}$ be a subspace of the space $\mathbb{F}^n$. Define its orthogonal complement $\mathcal{S}^\perp$ and show that $\mathcal{S}^\perp$ is a subspace.

5. Assume the matrix $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ has eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ and corresponding linearly independent eigenvectors $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$.

(a) Show that the matrix $A + \mu I$ is nonsingular for any $\mu \in \mathbb{C}$ such that

$$\mu \neq -\lambda_i \qquad \text{for all} \quad i = 1, \dots, n.$$

(b) Assume A^{-1} exists and $S \in \mathbb{F}^{n\times n}$ is nonsingular. Find the eigenvalues and the corresponding linearly independent eigenvectors of the matrix $B = SA^{-1}S^{-1}$.