MAT-41120 Matemaattinen optimointiteoria 1
Tentti 22.5.2006

Tentissä saa käyttää kirjallista materiaalia oman valinnan mukaan.

1. Tarkastellaan standardimuotoista primaali-duaaliparia

$$
\text{(LP)}\quad \begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{ehdoilla} & A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}
\qquad\qquad
\text{(DP)}\quad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{u} \\ \text{ehdoilla} & A^T\mathbf{u} \leq \mathbf{c}, \\ & \mathbf{u}\ \text{vapaa.} \end{array}
$$

Tutki, ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia. Anna lyhyt perustelu tai vastaesimerkki.

a. Jos primaalilla on useita optimikantoja, niin ne ovat degeneroituneita.

b. Duaalitehtävän optimiarvo on suurempi kuin primaalitehtävän optimiarvo. optimiarvot samat. lause 2.3.4 s. 20

c. Oletetaan, että $\Omega_{LP} \neq \emptyset$, mutta primaalilla ei ole äärellistä optimia. Rajoitusyhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oikea puoli voidaan muuttaa sellaiseksi, että (LP):llä on äärellinen optimi.

2. Kirjoita seuraavan LP–probleeman duaali.

$$
\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{ehdoilla} & A_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1, \\ & A_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \\ & \cancel{A_3\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_3}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}
$$

missä $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$, $i = 1, 2, 3$. Sievennä mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

3. Oletetaan, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on konveksi ja jatkuvasti derivoituva. Oletetaan edelleen, että $\mathbf{x}^*$ on probleeman

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

optimipiste, mutta $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ei ole optimipiste. Osoita, että $\mathbf{d} = \mathbf{x}^* - \mathbf{y}$ on f:n vähenemissuunta pisteessä $\mathbf{y}$.

4. Tarkastellaan probleemaa

$$
(*)\qquad \begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{ehdoilla} & A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{array}
$$

a. Onko piste $\mathbf{x} = [3, -3]^T$ probleeman KT–piste, kun

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-3)^2,\ A = [1\ 1],\ b = 0?$$

b. Olkoon $\mathbf{x}^*$ probleeman (*) KT–piste ja oletetaan, että matriisin A vaakarivit ovat lineaarisesti riippumattomia. Osoita, että pisteessä $\mathbf{x}^*$ Lagrangen kerroinvektoreita $\boldsymbol{\lambda}$ on tarkalleen yksi.