MAT-41140 Johdatus Funktionaalianalyysiin

II Välikoe 12.5.2006

Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskimia

Tehtävä 1. Olkoon H Hilbert-avaruus. Määrittele operaattorille $T : H \to H$ seuraavat käsitteet.

(a) T on lineaarinen ja rajoitettu.

(b) T on kompakti.

(c) T:n spektri ja spektrin osat.

Tehtävä 2. Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T \in B(H)$. Osoita, että $\mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{N}(T)$.
Tässä $\mathcal{N}(T) = \{ x \in H \mid Tx = 0 \}$.

Tehtävä 3. Olkoon H Hilbert-avaruus.

(a) Määrittele H:n ortonormaali jono ja ortonormaali kanta.

(b) Olkoon $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruuden H ortonormaali kanta ja $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Määritellään operaattori $T : H \to H$ kaavalla

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Osoita, että $T \in B(H) \iff (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu jono.

Tehtävä 4. Olkoon M Hilbert-avaruuden H suljettu aliavaruus ~~osajoukko~~. Osoita, että $H = M \oplus M^{\perp}$.
Vihje: Käytä miniminormilausetta.