MAT-60000 Matriisilaskenta 1

Välikoe 1 (7.10.2013) luennoitsija: Lassi Paunonen.

Ei laskimia, ei kirjallisuutta.

1. Ovatko avaruuden $\mathbb{C}^3$ vektorit

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   (a) ortogonaaliset?

   (b) lineaarisesti riippumattomat?

   (c) avaruuden $\mathbb{C}^3$ kanta?

   Perustele vastauksesi!

2. Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -12 & 3 & -7 \\ 8 & -16 & -16 \end{bmatrix}$$

   LU-hajotelma ja laske $\det(A)$.

3. Olkoon $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\} \subset \mathbb{F}^n$

   (a) Määrittele $\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$.

   (b) Osoita, että jos $\boldsymbol{x}_1$ voidaan ilmaista vektoreiden $\boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ lineaarikombinaationa, niin tällöin

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_m\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_2, \ldots \boldsymbol{x}_m\}.$$

4. (a) Määrittele avaruuden $\mathbb{F}^n$ aliavaruus, ja osoita, että nollavektori $\mathbf{0}$ kuuluu jokaiseen aliavaruuteen.

   (b) Funktio $\boldsymbol{f} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ on **jatkuva** pisteessä $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{F}^n$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohden voidaan valita $\delta > 0$ siten, että $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon$ aina kun $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$.

   Olkoon $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Osoita, että funktio $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ on jatkuva jokaisessa pisteessä $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{F}^n$.