MAT-60150 Differentiaaliyhtälöt/Orelma
1. Välikoe 21.2.2014

Kirjoita jokaiseen konseptiin nimesi ja opiskelijanumerosi. Tee tehtävät siististi konsepteille välivaiheet perustellen. Ei laskinta eikä muistiinpanoja.

Kokeessa saa olla mukana yksi kaksipuolinen A4 käsin kirjoitettu muistilappu.

1. Tarkastellaan matriisia
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta^2 \\ \beta^2 & 0 \end{bmatrix},$$
missä $\beta \neq 0$.

   (a) Etsi matriisi P ja diagonaalimatriisi D siten, että
$$A = PDP^{-1}.$$

   (b) Määritä (a)-kohdan avulla eksponenttimatriisi e^{tA}.

   (c) Jos
$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} e^{t\beta^2} \\ e^{t\beta^2} \end{bmatrix}$$
on matriisiyhtälön $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ ratkaisu, mikä on se alkuarvo-ongelma, jota tämä ratkaisu vastaa ja mikä on sen ratkaisu?

2. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$
jolloin
$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t\cos(t) & -e^t\sin(t) & 0 & 0 \\ e^t\sin(t) & e^t\cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ 0 & 0 & -e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} e^t\cos(t) & -e^t\sin(t) & -e^t\cos(t) + e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ e^t\sin(t) & e^t\cos(t) & -e^t\sin(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ 0 & 0 & -e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\cos(3t) \end{bmatrix}$$
Tämän avulla:

   (a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja -vektorit.

   (b) Määritä sellainen lohkodiagonaalimatriisi D ja matriisi $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}$, että
$$D = P^{-1}AP.$$

   (c) Jos muunnosmatriisiksi vaihdetaan $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$, niin mikä on tällöin lohkodiagonaalimatriisi D' jolle
$$D' = Q^{-1}AQ?$$