Fourier'n menetelmät

Tentti 1.3.2024 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
Muista, että pisteet tulevat perusteluista, ei arvauksista.

1. Funktio $f : f(t) = -2t$, kun $-2 \leq t < 2$. Viivan pala muodostaa yhden jakson, jota jatketaan. Laske määritelmän mukaisesti sellainen trigonometrinen Fourier-sarja, joka vastaa jaksollista funktiota f.

2. Jaksollisen funktion f Fourier-sarja on $\hat{f}$. Funktion f arvot toteuttavat seuraavat ehdot

$$f(t) = \begin{cases} 2t+1, \text{ kun } -1 \leq t < 0, \\ |t^2-1|, \text{ kun } \quad 0 \leq t < 3, \end{cases} \qquad f(t+4) = f(t), \forall t.$$

a) Mitä on $\hat{f}(10)$ ja $\hat{f}(11)$?
b) Missä kohdissa syntyy Gibbsin ilmiö,vai syntyykö ollenkaan?
c) Minkä suorien $y = a$ ja $y = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ väliin $\hat{f}$ mahtuu? Kyseessä on likiarvot, jotka eivät saa olla liian pieniä eikä turhan suuria.

3. Erään otoksen, jossa $T = 7$ ja näytteitä on otettu 0.5:n välein, DFT-jonon alku

$$\left\{\pi,\ 2-\mathrm{j},\ \frac{2}{7}\mathrm{j},\ 1+2\mathrm{j},\ \frac{1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{5},\ 0,\ \frac{1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{5},\ 0\ldots\right\}.$$

a) Loppujono oli pyyhkiytynyt pois. Täydennä jonon loppu.
b) Mikä on arvio termille $|c_4|$ ja mitä taajuutta se vastaa?
c) DFT-jonon jäseniä voitaisiin laskea ääretön määrä. Mitä on G_{-3} ja G_{40}?

4. **a)** Oletetaan, että f on jatkuva sekä funktioiden $|f|$ ja $|f'|$ integraalit yli koko reaaliakselin ovat äärellisiä. Etsi funktion f Fourier-muunnos, kun

$$2f(t) - f(t+1) + f'(t) = \mathrm{e}^{-|t|}.$$

b) Vakiot b ja c ovat positiivisia. Laske funktioiden f ja g konvoluutio, kun

$$f(t) = \frac{b}{\pi(t^2+b^2)}, \quad g(t) = \frac{c}{\pi(t^2+c^2)}.$$

Muutama muunnos, joissa $a > 0$ ja joista on apua tai sitten ei:
1. $\mathscr{F}\{a\}(\omega) = 2\pi a\delta(\omega)$ 2. $\mathscr{F}\{\mathrm{e}^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ 3. $\mathscr{F}\{H(t)\mathrm{e}^{-at}\}(\omega) = \frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$

Kaavakokoelma

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$, $\quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$,

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$.

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n|\cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, & n &= 0,1,2,3,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt, & n &= 1,2,3,\ldots \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,dt, & n &= 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T}\int_d^{d+T} f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}nk\frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1, \qquad g_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}nk\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1.$$

$$\mathscr{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega u}\,du, \qquad \mathscr{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,d\omega.$$

$$\mathscr{F}\Big\{f(at)\Big\}(\omega) = \frac{1}{|a|}F\Big(\frac{\omega}{a}\Big), \quad a \neq 0, \qquad \mathscr{F}\Big\{f'(t)\Big\}(\omega) = \mathrm{j}\omega F(\omega)$$

$$\mathscr{F}\Big\{f(t-a)\Big\}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}a\omega}F(\omega), \qquad \mathscr{F}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}bt}f(t)\}(\omega) = F(\omega-b)$$

$$\mathscr{F}\Big\{(f*g)(t)\Big\}(\omega) = F(\omega)G(\omega), \qquad \mathscr{F}\Big\{f(t)g(t)\Big\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$$

$$\mathscr{F}\Big\{\mathscr{F}\{f\}(t)\Big\}(\omega) = \mathscr{F}\Big\{F(t)\Big\}(\omega) = 2\pi f(-\omega), \qquad (f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|^2\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\hat{F}(\omega) = h\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega kh}, \qquad \Big\{\hat{F}_n\Big\}_{n=0}^{N-1} = \Big\{hG_n\Big\}_{n=0}^{N-1}.$$