

Graafialgoritmit MATH.APP.270

Tentti 1.3.2023 Ei laskimia tai kirjallisuutta. Arvioitu tehtävien vaativuus on noin 35-60 minuuttia per tehtävä. Tee kaikki kolme. Tehtävät arvioidaan siten, että kaksi parasta huomioidaan 100% painoarvolla ja heikoin 50% painoarvolla.

1. Ohessa on yksinkertainen graafialgoritmi, joka värittää tietyt solmut valkoisista mustiksi. Se ottaa syötteenään suunnatun graafin ja yhden sen solmuista, s . Ohessa $\text{ADJ}(u)$ on niiden solmujen v joukko, joille pätee että $(u, v) \in E$.

Algorithm 1 Algoritmi 1

input $(V, E), s \in V$

```
1: for  $v \in V$  do
2:    $col[v] := white$ 
3: end for
4: Stack  $S$ 
5:  $S.PUSH(s)$ 
6:  $col[s] := grey$ 
7: while  $S \neq \emptyset$  do
8:    $u = S.POP()$ 
9:   for  $v \in \text{ADJ}(u)$  do
10:    if  $col[v] = white$  then
11:       $S.PUSH(v)$ 
12:       $col[v] = grey$ 
13:    end if
14:   end for
15:    $col[u] = black$ 
16: end while
```

- (a) Osoita että jos syötegraafissa on solmusta s polku solmuun t , niin tämän polun kaikki solmut tulevat maalatuksi mustiksi. Etsi while-silmukalle sopiva invariantti tähän tarkoitukseen.

- (b) Pitääkö seuraava väite paikkansa:

Graafissa on jokin suunnattu silmukka u_0, \dots, u_n ja jokin polku solmusta s solmuun u_0 jos ja vain jos algoritmin 1 suorituksen aikana kohdataan harmaa polku rivillä 10.

Todista väite tai anna esimerkki graafista jossa väittäjä ei toteudu.

2. Kuvitellaan, että olet kaupunkisuunnittelija, ja sinulla on käytössäsi kartta kaava-alueesta. Se on annettu painotettuna graafina (V, E, w) siten että solmut kuvaavat kortteleita ja kaaret viereisiä kortteleita yhdistäviä teitä. Kaaren paino $w(u, v)$ kertoo kuinka kauan kestää ajaa ambulanssilla korttelinväli u :stä v :hen. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi että näitä kaaria on korkeintaan yksi kahden eri korttelin välillä. Voit olettaa että graafi on suuntaamaton tai suunnattu, tällä ei ole tehtävän arvioinnin kannalta merkitystä. On annettu joukko $S \subseteq V$. Jokainen solmu joukossa kuvaa osoitetta johon voitaisiin rakentaa paloasema. Lisäksi on annettu joukko $H \subseteq V$. Jokainen solmu tässä kuvaa kaupungissa jo olevaa sairaalaa.
- Selitä mitä mittaria käyttäisit sen ratkaisemiseksi mihin paloasema kannattaisi rakentaa, kun tavoitteena on, että ambulanssin vasteaika (aika paloasemalta potilaan luokse) plus ambulanssin paluu-aika sairaalasta takaisin asemalle tulisi minimoida.
 - Kerro mitä algoritmia/algoritmeja käyttäisit kyseisen mittarin arvon ratkaisemiseksi. Arvioi ehdotuksesi kompleksisuutta suhteessa graafin kokoon, siinä olevien solmujen ja kaarten määrään ja sairaaloiden määrään nähden.
3. Äärellistä suunnattua graafia jossa ei ole lainkaan suunnattuja silmukoita, kutsutaan englanniksi nimellä *directed acyclic graph* eli DAG. Olkoon meillä mikä hyvänsä graafi jossa on n solmua. Tehtävänä on etsiä solmuille bijektiivinen kuvaus¹ $f : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$, siten että jos $(u, v) \in E$ niin $f(u) < f(v)$. Tällaista numerointia (tai oikeammin sen mukaista solmujen järjestystä) sanotaan myös *topologiseksi järjestykseksi*. Tiedetään että topologinen järjestys on olemassa jos ja vain jos graafi on DAG.
- Perustele, että jos annettu graafi on DAG ja siinä on äärellinen määrä solmuja, niin siinä on ainakin yksi solmu josta ei lähde kaaria, ja ainakin yksi solmu johon ei tule kaaria.
 - Perustele, että jos graafissa on suunnattu silmukka, sille ei voi löytää topologista järjestystä.
 - Kuvaile algoritmia joka käyttäisi hyväkseen kohdan a) ominaisuutta hyväkseen topologisen järjestyksen löytämiseksi.

¹Eli käytännössä numerointi solmuille niin että jokaisella solmulla on oma numero välillä $1-n$