Elias Viju

MATH.APP.410 Matriisilaskenta (kevät 2023) / Mattila
Tentti 12.9.2023

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tenttitehtävien ratkaisut löytyvät aikanaan kurssin Moodle-alueelta.

1. (a) Oletetaan, että vektorit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$ yhdessä muodostavat ortonormaalin joukon. Määritä tätä tietoa käyttäen $\|2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z}\|$. (3p)

   (b) Tutki, onko kompleksinen 2×2-matriisi $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$ hermiittinen, unitaarinen ja/tai kääntyvä. (3p)

   A^* $A^*A = I$

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 5 & 25 & 36 \\ -2 & -27 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Määritä LU-hajotelma matriisille A. (2p)

   (b) Määritä $\det(A)$ ja ratkaise yhtälö $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ LU-hajotelmaa hyödyntäen. (3p)

   (c) Esitä vektori $\boldsymbol{b}$ matriisin A sarakkeiden lineaarikombinaationa. (1p)

3. (a) Osoita, että jos $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ on lineaarisesti riippumaton vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ osajoukko ja $\boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{C}^n$ on vektori joka ei kuulu aliavaruuteen $\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$, niin tällöin joukko $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ on myös lineaarisesti riippumaton. (3p)

   (b) Olkoon A 7×6-matriisi josta tiedetään, että matriisiyhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ on olemassa ainoastaan triviaali ratkaisu. Määritä matriisin A aste ja sen ytimen dimensio (nulliteetti). (3p)

4. (a) Oletetaan, että vektori $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ toteuttaa ehdon $\|\boldsymbol{x}\| = 1$. Osoita, että matriisi $P = I_n - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^*$ on ortogonaaliprojektorimatriisi näyttämällä, että ehdot $P^2 = P$ ja $P^* = P$ toteutuvat. Lopuksi kirjoita näkyviin matriisi P tapauksessa, jossa $\boldsymbol{x} = \frac{1}{4}(2-i, 1, -1+3i) \in \mathbb{C}^3$. (3p)

   (b) Matriisin A tiedetään olevan kompleksinen neliömatriisi, joka on similaarinen blokkidiagonaalimatriisin

$$J = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+3i \end{bmatrix}$$

   kanssa. Päättele näiden tietojen avulla matriisin A ominaisarvot, niiden algebralliset kertaluvut sekä kutakin ominaisarvoa vastaavien lineaarisesti riippumattomien ominaisvektoreiden lukumäärät. Onko matriisi A kääntyvä vai ei? Onko matriisi A diagonalisoituva vai ei? (3p)