MATH.APP.420 Differentiaaliyhtälöt
Tentti 7.5.2024

Tentaattori: Heikki Orelma

Ei laskimia, ei kirjallisuutta eikä oheismateriaalia. Vain muistiinpanovälineet.

1. (a) Tarkastellaan lineaarista epähomogeenista differentiaaliyhtälöä $Ly = f$. Miten määrität yksittäisratkaisun määräämättömien kertoimien menetelmällä? Demonstroi menetelmää, kun $f(x) = x^3$ ja $f(x) = e^{2x}$. (3p.)

   (b) Määritä homogeenisen differentiaaliyhtälön

$$x^2y'' - 2y = 0$$

   ratkaisuavaruus. (3p.)

2. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$(1 + ye^x)y' + y^2e^x = 0, \ y(0) = 1.$$

3. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

   välillä I. Määritellään funktio

$$z(x) = y(x)e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(t)dt},$$

   kun $x_0 \in I$.

   (a) Oletetaan, että a on derivoituva joukossa I. Osoita, että muuttujanvaihdossa $y(x) \mapsto z(x)$ yhtälö muuttuu muotoon

$$z'' + \big(b(x) - \frac{1}{4}a(x)^2 - \frac{1}{2}a'(x)\big)z = f(x)e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

   (b) Etsi yhtälölle

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

   yleinen ratkaisu kun $x > 0$ hyödyntämällä kohdan (a) muuttujanvaihtoa.

KÄÄNNÄ!

4. (a) Tarkastellaan funktioita $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$ ja $x \mapsto x^2$. Mitä voit sanoa näiden lineaarisesti riippumattomuudesta avaruuksissa $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ja $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

   (b) Tarkastelaan toisen kertaluvun vakiokertoimisen alkuarvo-ongelman epähomogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön yleistä ratkaisua, missä epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu on annettu Greenin funktion avulla

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\int_{\ln(2)}^{x} \left(e^{-(x-t)} - e^{-3(x-t)}\right)\sin(t)\,dt.$$

      i. Mikä on vastaava homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö?
      ii. Mikä on yhtälön Greenin funktio?
      iii. Missä pisteessä alkuehdot on annettu?

KAAVOJA: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{1}{\mu}\Big(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\Big) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$, $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$, $\mu(y) = e^{\int \frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$, $(y_i(x_0), y_i'(x_0), \dots, y_i^{(n-1)}(x_0))$, $W[y_1,y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, $c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x) = 0$, $W[y_1,\dots,y_n](x) = W[y_1,\dots,y_n](x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(x)dx}$, $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, $y_2(x) = Cy_1(x)\int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$, $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0I$, $p(D)e^{\lambda x} = p(\lambda)e^{\lambda x}$, $(D - \lambda I)e^{\lambda x} = 0$, $a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1xy' + a_0y = 0$, $y(x) = x^\alpha$, $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$, $y(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)f(t)\,dt$, $G(x,t) = \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W[y_1,y_2](t)}$, $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$.