MIT-3010 MITTAUSDATAN ANALYYSI

TENTTI 11.5.2011. TENTISSÄ SAA KÄYTTÄÄ LASKINTA.

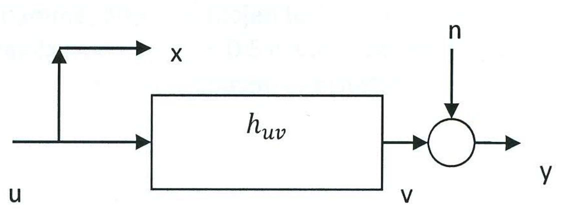
Tehtävä 1. Selitä lyhyesti (max 20 sanaa + 1 yhtälö) kukin seuraavista käsitteistä:

a) A posteriori -tieto/A posteriori information
b) Tilastollinen prosessin hallinta/Statistical Process Control.
c) MA(L)-malli /MA(L) model.
d) Autokorrelaatiofunktio/Autocorrelation function.
e) Stationäärisyys/Stationarity
f) Parametrinen tehospektriestimaatti / Parametric estimate for power spectrum
   (1 piste jokaisesta kohdasta, kaikkiaan 6 pistettä).

Tehtävä 2. Tarkastellaan pienten erikokoisten kappaleiden lukumäärää mittaavaa konenäköjärjestelmää. Kappaleet punnitaan ensi yhdessä ja sitten asetetaan tasaiselle alustalle. Punnituksen perusteella voidaan päätellä, että kappaleita on 13, 14, 15, 16 tai 17, niin että kunkin lukumäärän todennäköisyys on vastaavasti 0.1, 0.2, 0.4, 0.2 ja 0.1. Konenäköjärjestelmän epätarkkuudesta tiedetään, että järjestelmä laskee kappaleet oikein todennäköisyydellä 0.8, mutta tekee yhden tai kahden virheen sekä suurempaan että pienempään päin, kunkin todennäköisyydellä 0.05. Virheet johtuvat esimerkiksi siitä, että kappaleet menevät tasolla ajoittain päällekkäin, jolloin konenäköjärjestelmä ei pysty erottamaan kappaleita toisistaan.

a) Punnitus antaa priori informaation kappaleiden lukumäärästä. Kuvaa toisaalta tämä informaatio ja toisaalta mittauksen informaatiokanava todennäköisyysjakaumina (2 pistettä).
b) Konenäköjärjestelmä havaitsee 17 kappaletta. Mitä tiedämme tämän ja ennakkotiedon perusteella kappaleiden lukumäärästä. Anna vastaus todennäköisyyksinä (3 pistettä).
c) Tasoa ravistellaan voimakkaasti niin, että kappaleet muuttavat paikkojaan. Tämän jälkeen konenäköjärjestelmä havaitsee uudelleen 17 kappaletta. Miten laskisit informaation kappaleiden lukumäärästä tämän uuden havainnon jälkeen (ei tarvitse laskea, lyhyt selitys ennakkotiedosta ja mittauksen mallista riittää). Mikä oli ravistelun merkitys? (1 piste)

Tehtävä 3. Tarkastellaan kuvan mukaista systeemiä.



Systeemistä mitataan x ja y, joiden spektrit sekä keskinäinen ristispektri on annettu liitekuvissa. Määrittele ja hahmottele datan perusteella koherenssi, sekä hahmottele kohinan n spektri, ja systeemin siirtofunktio sekä sen luotettavuus. Perustele hahmottelumenettelysi, erityisesti kohinan n spektrin osalta.

Tehtävä 4. Satunnaismuuttuja T on eksponentiaalisesti jakautunut eli sen tiheysfunktio on

$$f_T(t) = \alpha \exp(-\alpha t)$$

Meillä on N kappaletta havaintoja T:stä, eli t_i, $i=1,..N$.

a) Selitä parametrien Maximum a posteriori (MAP) -identifiointimenetelmän yleinen periaate ja miten siitä saadaan maximum likelihood (ML) -menetelmä, kun parametrista ei ole ennakkotietoa (2 pistettä).

b) Ilmoita parametrin α ML-estimaatti havaintojen t_i avulla. (2 pistettä)

c) Ilmoita parametrin α MAP-estimaatti, kun havaintojen lisäksi on olemassa ennakkotieto

$$f_A(\alpha) = C(d,K) \cdot \alpha^K \cdot \exp(-\alpha d)$$

missä d ja K ovat tunnettuja lukuja ja $C(d,K)$ on jakauman normalisointitekijä. (2 pistettä).

Tehtävä 5. Eräällä koneella on kolme tilaa, joita kutsutaan nimellä a, b ja c. Koneen tilan x dynamiikkaa (aika on diskreetti, aikamuuttuja n) kuvaa ehdollinen todennäköisyys

$$P(x_{n+1} = i \mid x_n = j) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$i, j \in \{a, b, c\}$$

missä ensimmäinen sarake antaa todennäköisyydet ko. kolmelle tilalle ajanhetkellä $n+1$, kun $x_n = a$ ja niin edelleen. Koneesta tehdään jatkuva-arvoinen mittaus y. Mittauksesta tiedetään, että mittausarvo on normaalijakautunut niin, että jos $x = a$, mittausta kuvaavan normaalijakauman

$$f_Y(y \mid x) = N(y; \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(y-\mu)^2\right]$$

odotusarvo $\mu(a) = -1$, jos $x_n = b$, $\mu(b) = 0$ ja jos $x_n = c$, $\mu(c) = 1$. Mittausten hajonta on $\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(c) = 1$.

a) Jos $x_n = a$, mikä on mittaustuloksen y_{n+1} todennäköisyysjakauma (2 pistettä).

b) Jos tiedämme, että x_n:n tilojen todennäköisyydet ajanhetkellä n tehdyn mittauksen perusteella ovat a: 0.1, b: 0.5 c: 0.4 ja saamme mittaustuloksen $y_{n+1} = 1$, mitä tiedämme tilasta x_{n+1} mittauksen jälkeen. (4 pistettä)

LIITTEET

Tehtävä 3. Tehospektrit ja ristispektri