[redacted]

Tampereen yliopisto, ITC
Todennäköisyyslaskenta (MTTTP4, korvaa kurssia MAT-02500)
Loppukoe 17. 10. 2019

Omat taulukot ja laskimet ovat kiellettyjä. Vastaukset pitää perustella.

1. Heitetään sinistä ja vihreätä noppaa ja kolikkoa, kutakin kerran.

a) Mikä perusjoukko Ω kuvaa hyvin tätä satunnaiskoetta? (Voit merkitä $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.)

b) Satunnaismuuttuja S kuvatkoon sinisen nopan ja V vihreän nopan silmälukua, kun taas satunnaismuuttujan X arvo on sinisen nopan silmäluku, jos kolikonheitosta tuli kruuna, mutta vihreän nopan silmäluku, jos kolikonheitosta tuli klaava. Määritä $\mathbb{P}\{S = X\}$.

c) Ovatko tapahtumat $\{S = X\}$ ja $\{V = X\}$ keskenään riippumattomia?

2. Todennäköisyys, että Angela on Brysselissä eräänä perjantaina on 0,5, ja todennäköisyys, että Boris on Brysselissä samaisena perjantaina on 0,6. Todennäköisyys, että Angela on tänä perjantaina Brysselissä sillä ehdolla, että Boriskin on Brysselissä, on 0,7.

a) Millä todennäköisyydellä molemmat, Angela ja Boris, ovat tänä perjantaina Brysselissä?

b) Määritä todennäköisyys, että Boris on Brysselissä sillä ehdolla, että Angela on Brysselissä.

c) Mikä on todennäköisyys, että ainakin toinen on tarkasteltavana perjantaina Brysselissä?

[Laske laskut kahden numeron tarkkuudella.]

3. Syventävien opintojen kurssille osallistuu 12 opiskelijaa. Opiskelijat toimivat toisistaan riippumattomasti, ja kunkin kohdalla todennäköisyys, että hän osallistuu kurssikokeeseen, on 0,8. Kokeeseen saapuu N opiskelijaa.

a) Miten N on jakautunut? Määritä $\mathbb{E}N$.

b) Koesalissa 10 istumapaikkaa tenttijöille. Mikä on todennäköisyys, etteivät kaikki saa istumapaikkoja?

4. Jatkuvasti jakautuneella satunnaismuuttujalla X on tiheysfunktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = c \cdot \max\{x - x^2, 0\}.$$

a) Määritä vakio c ja satunnaismuuttujan X kertymäfunktio.

b) Satunnaismuuttuja X *mediaani* on se luku m, jolle $\mathbb{P}\{X \geq m\} = 1/2$. Määritä X:n mediaani.

c) Laske odotusarvo $\mathbb{E}X$ ja varianssi $\mathbb{D}^2 X$.

Diskreettejä jakaumia

Ptnf lyhentää sanaa "pistetodennäköisyysfunktio".

Jakaumatyyppi: Binomijakauma

Parametrit: $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

Ptnf: $f(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, kun $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.

Jakaumatyyppi: Hypergeometrinen

Parametrit: $N, K, n \in \mathbb{N}$, $N \geq K$, $N \geq n$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Hyperg}(N, K, n)$

Ptnf:

$$f(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

kun $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \min\{K, n\}$.

Jakaumatyyppi: Geometrinen

Parametrit: $p \in [0, 1]$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Geom}(p)$

Ptnf: $f(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = p(1-p)^k$.

Jakaumatyyppi: Poisson-jakauma

Parametrit: $\lambda > 0$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$

Ptnf: $f(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^k / k!$.

Jatkuvia jakaumia

Jakaumatyyppi: Tasainen jakauma

Parametrit: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \text{Tas}(a, b)$

Tiheysfunktio:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{kun } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

Jakauma: Standardinormaalijakauma

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$

Tiheysfunktio:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion arvoja:

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	3
$\Phi(x)$	0,579	0,655	0,726	0,788	0,841	0,933	0,977	0,999

Jakaumatyyppi: Normaalijakauma

Parametrit: μ, σ^2

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$

Määrittely:

$$X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathbf{N}(0, 1)$$