MATH.APP.410 Matriisilaskenta (kevät 2024) / Mattila
Tentti 16.5.2024

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tenttitehtävien ratkaisut löytyvät aikanaan kurssin Moodle-alueelta.

1. (a) Ratkaise tuntematon vektori $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3$ yhtälöstä

$$(2+i)\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (1-i)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}), \qquad \text{missä} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2i \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (3p)$$

   (b) Oletetaan, että A, B ja C ovat kaikki saman kokoisia neliömatriiseja. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Perustele vastauksesi lyhyesti. (1p per kohta)

   (i) Jos $A + B = A + C$, niin $B = C$.

   (ii) Jos $AB = AC$, niin $B = C$.

   (iii) Jos matriisin A jonkin sarakkeen kaikki alkiot ovat nollia, niin myös matriiseihin AB ja BA tulee nollia täynnä oleva sarake.

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Muodosta matriisille A LU-hajotelma käyttämällä tarvittaessa apuna sopivaa permutaatiomatriisia P ja ratkaise saamaasi hajotelmaa käyttäen lineaarinen yhtälöryhmä $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. (6p)

3. Tarkastellaan 2×2-matriisia $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, missä a ja b ovat tuntemattomia reaalisia vakioita. Mikäli mahdollista, määritä näille vakioille sellaiset arvot, että (1.5p/kohta)

   (a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(A)$,

   (b) matriisista A tulee symmetrinen ja sen sarakevektorit ovat lineaarisesti riippuvat,

   (c) matriisin A sarakevektorit ovat keskenään ortogonaaliset ja kummankin sarakevektorin normi on $\sqrt{2}$,

   (d) vektori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ on matriisin A ominaisvektori ja 3 on sitä vastaava ominaisarvo.

4. (a) Osoita, että jos neliömatriisit A ja B ovat similaariset (eli $A = S^{-1}BS$ jollakin kääntyvällä neliömatriisilla S), niin $\det(A) = \det(B)$, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$ sekä $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$. Voit olettaa tunnetuksi, että $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ millä tahansa matriiseilla X ja Y, kunhan matriisien koot ovat sellaiset, että kumpikin matriisituloista XY ja YX on määritelty. (3p)

   (b) Matriisin A tiedetään olevan similaarinen blokkidiagonaalimatriisin

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   kanssa. Päättele tämän tiedon perusteella, mitkä ovat matriisin A ominaisarvot ja kuinka monta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria kutakin ominaisarvoa kohti on olemassa. Onko matriisi A diagonalisoituva ja/tai kääntyvä? (3p)