MATH.APP.420 Differentiaaliyhtälöt
Tentti 1.10.2024

Tentaattori: Pasi Raumonen

Ei laskimia, ei kirjallisuutta eikä oheismateriaalia. Vain muistiinpanovälineet.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin (à 1p). Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\sin(x)y'' - 3y''' + xy - y' = e^x.$$

   (a) Mikä on differentiaaliyhtälön kertaluku?
   (b) Onko differentiaaliyhtälö ei-vakiokertoiminen/vakiokertoiminen? (perustele vastauksesi)
   (c) Mikä on differentiaaliyhtälön homogeenisen osan ratkaisuavaruuden dimensio?
   (d) Mikä on yhtälöä vastaava lineaarinen differentiaalioperaattori L?
   (e) Mitä voit sanoa differentiaaliyhtälön ratkaisun reaalianalyyttisyydestä? (perustele vastauksesi)
   (f) Miten ratkaiset määräämättömien kertoimien menetelmällä epähomogeenisen yhtälön ratkaisun?

2. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$x^2y' = ax^2y^2 + bxy + cx^n + s,$$

missä $a, b, c, s, n \in \mathbb{R}$. Osoitan, että sijoittamalla $ay = -\frac{u'}{u}$, yhtälö saadaan muotoon

$$x^2u'' - bxu' + a(cx^n + s)u = 0.$$

Ratkaise tällä menetelmällä yhtälö

$$x^2y' = x^2y^2 - xy - 1.$$

3. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'' + k^2y = 1, \ \ y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

missä $k \in \mathbb{R}$.

4. Palautetaan mieliin reuna-arvo -ongelman yleisen Greenin funktion määritelmä:

Olkoon $H(x,t)$ kahden reaalimuuttujan jatkuva funktio, joka kahdesti derivoituva muuttujan x suhteen. Funktiota kutsutaan reuna-arvo -ongelman Greenin funktioksi jos se toteuttaa ehdot:

(a) $x \mapsto H(x,t)$ on homogeenisen yhtälön $Ly = 0$ ratkaisu kun $x \neq t$.

(b) Funktio toteuttaa reunaehdot $H(a,t) = H(b,t) = 0$.

(c) Funktio on symmetrinen $H(x,t) = H(t,x)$.

(d) Funktio on jatkuva pisteessä $x = t$.

(e) Funktio $\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)$ toteuttaa hyppyehdon:

$$\lim_{x\to t+} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) - \lim_{x\to t-} \frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = 1.$$

Määritä tämän avulla Greenin funktio reuna-arvo -ongelmalle

$$\tfrac{1}{2}y'' = 0, \; y(0) = y(3) = 0,$$

kun $0 \leq x \leq 3$.

KAAVOJA: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{1}{\mu}\Big(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\Big) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$, $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$, $\mu(y) = e^{\int \frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$, $(y_i(x_0), y_i'(x_0), \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0))$, $W[y_1,y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, $c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0$, $W[y_1,\ldots,y_n](x) = W[y_1,\ldots,y_n](x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(x)dx}$, $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, $y_2(x) = Cy_1(x)\int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$, $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0I$, $p(D)e^{\lambda x} = p(\lambda)e^{\lambda x}$, $(D - \lambda I)e^{\lambda x} = 0$, $a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1xy' + a_0y = 0$, $y(x) = x^\alpha$, $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$, $y(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t)f(t)\,dt$, $G(x,t) = \frac{y_2(x)y_1(t) - y_1(x)y_2(t)}{W[y_1,y_2](t)}$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.