



# Usean muuttujan funktiot

Tentti 22.11.2022 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta

Muista, että jokaisessa tehtävässä pisteet tulevat perusteluista eikä arvauksista.

Muista myös olla huolellinen. Pienikin virhe voi johtaa hankaliin laskuihin.

1. Tarkastellaan funktiota  $f : f(x, y) = x - 4y^2 + 2y$ . Sen tasa-arvokäyrät  $f(x, y) = c$  ovat parametrimuodossa  $\mathbf{r}(t) = (c - t + t^2, t/2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

a) Määritä  $\nabla f$ :n arvo pisteessä  $\mathbf{r}(2)$ .

b) Määritä pisteeseen  $\mathbf{r}(2)$  asetettu tasa-arvokäyrän tangenttivektori.

c) Määritä pisteeseen  $\mathbf{r}(2)$  asetettujen  $f$ :n gradientin ja tasa-arvokäyrän tangenttivektorin välinen pistetulo. Mikä on kulma niiden välillä?

2. a) Linearisoi funktio  $f : f(x, y, z) = zy^2 - 3x^2$  pisteessä  $(2, -1, 3)$ . Olkoon uuden funktion nimi  $L$ . Paljonko on  $L(3/2, -1/2, 2)$ ? Onko se yhtäsuuri kuin  $f(3/2, -1/2, 2)$ ?

b) Tiedetään, että jokaisessa avaruuden  $\mathbb{R}^3$  pisteessä funktio  $g$  vähenee voimakkaimmin suuntaan

$$(3x^2y)\mathbf{i} + (x^3 + z + \sqrt{15})\mathbf{j} + (y)\mathbf{k}.$$

Mikä on funktion  $g$  suunnatun derivaatan arvo pisteessä  $(1, 2, -1)$  vektorin  $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \sqrt{15}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  suuntaan?

3. Etsi funktion  $f : f(x, y) = 4y - 2x + \frac{1}{2}y^2 + x^2 - y^3$  kriittiset pisteet ja tutki onko kyseessä lokaalinen maksimi, minimi vai satulapiste.

4. Pinta  $z = 1 + x^2 + y^2$  sekä tasot  $z = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  rajaavat kappaleen avaruuden ensimmäisessä oktantissa ( $x, y, z \geq 0$ ). Integroi funktio

$$f : f(x, y, z) = 15y$$

kyseisen kappaleen yli.