SGN-11000 Signaalinkäsittelyn perusteet
Tentti 9.5.2018
Heikki Huttunen

- ▷ Oma laskin sallittu.
- ▷ Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa.
- ▷ Merkitse vastauspaperiin koska olet suorittanut pakolliset harjoitukset (jos ei kevät 2018).
- ▷ Vastaa konseptille. Kirjoita myös nimesi ja opiskelijanumerosi.

1. Ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia? (Perusteluja ei tarvita. Oikea vastaus: 1 p, väärä: $-\frac{1}{2}$ p, ei vastausta 0 p.) Pistemäärä pyöristetään ylöspäin lähimpään kokonaislukuun.

   (a) Signaalin $x(n)y(n)$ DFT on $X(n)Y(n)$.

   (b) Kaksi peräkkäistä LTI-järjestelmää voidaan aina toteuttaa yhtenä järjestelmänä.

   (c) Vaihevasteen lineaarisuus takaa, että signaalin kaikki taajuudet viivästyvät yhtä monta sekuntia.

   (d) IIR-suotimet ovat aina stabiileja.

   (e) Sinisignaalin värähtelytaajuus on 1500 Hz, ja siitä otetaan näytteitä $T = \frac{1}{2500}$ sekunnin välein. Tällöin tulossignaali näyttää värähtelevän 750 Hertsin taajuudella.

   (f) Lähimmän naapurin luokittelijan luokkaraja on lineaarinen.

2. (a) Erään suotimen napanollakuvio on kuvassa 1, ja tiedetään että sen amplitudivaste $|H(e^{i\omega})| \in [0, 1]$. Hahmottele suotimen amplitudivasteen kuvaaja niin tarkasti kuin se näillä tiedoilla onnistuu. (3p)

   (b) Laske vektorin

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   diskreetti Fourier-muunnos. (3p)

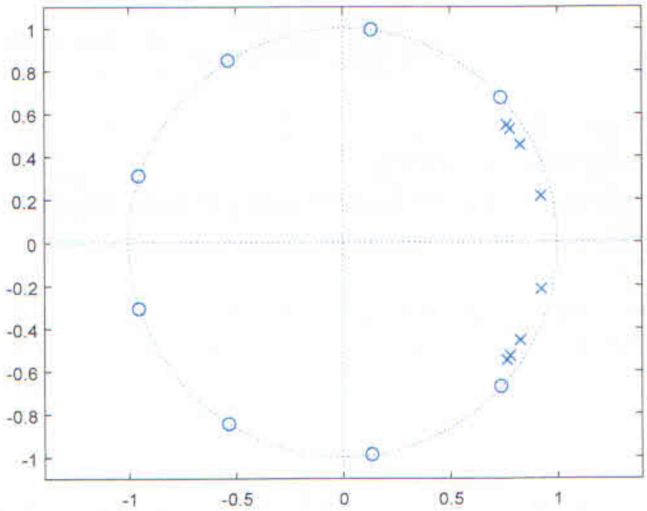
3. Oletetaan, että kausaalisen LTI-järjestelmän heräte $x(n)$ ja vaste $y(n)$ toteuttavat seuraavan differenssiyhtälön:

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - 2x(n-1) + x(n-2).$$

   (a) Määritä järjestelmän siirtofunktio $H(z)$.

   (b) Piirrä napa-nollakuvio.

   (c) Onko järjestelmä stabiili? Miksi / miksi ei?



Kuva 1: Tehtävän 2 napanollakuvio.

4. Signaalin näytteenottotaajuus halutaan nostaa 32 kHz $\rightarrow$ 48 kHz.

   (a) Piirrä lohkokaavio järjestelmästä, joka suorittaa muunnoksen. (3p)

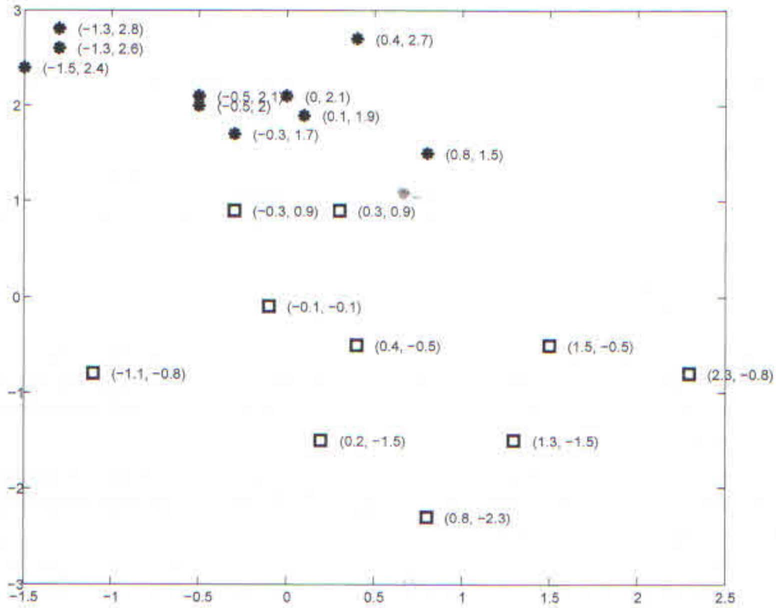
   (b) Mitkä ovat tarvittavien suodinten estokaistat (alku-loppu)? (3p)

5. (a) Kuva 2 esittää opetusdataa, jossa on kaksi luokkaa: "neliöt" ($\square$) ja "tähdet" ($*$). Kumpaan luokkaan 1-NN-luokittelija sijoittaa pisteen $(0.7, 1)$? Perustele. Entä 3-NN-luokittelija? Perustele.

   (b) Kausaalisen LTI-järjestelmän siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - az^{-1}},$$

   missä $a \in \mathbf{R}$. Millä vakion a arvoilla järjestelmä on stabiili?



Kuva 2: Vasen: Tehtävän 5 aineisto.

Joitakin aiheeseen ehkä liittyviä Wikipedia-sivuja

Suppose two classes of observations have means $\vec{\mu}_{y=0}, \vec{\mu}_{y=1}$ and covariances $\Sigma_{y=0}, \Sigma_{y=1}$. Then the linear combination of features $\vec{w} \cdot \vec{x}$ will have means $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=i}$ and variances $\vec{w}^T \Sigma_{y=i} \vec{w}$ for $i = 0, 1$. Fisher defined the separation between these two distributions to be the ratio of the variance between the classes to the variance within the classes:

$$S = \frac{\sigma^2_{between}}{\sigma^2_{within}} = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1} - \vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0})^2}{\vec{w}^T \Sigma_{y=1} \vec{w} + \vec{w}^T \Sigma_{y=0} \vec{w}} = \frac{(\vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0}))^2}{\vec{w}^T (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1}) \vec{w}}$$

This measure is, in some sense, a measure of the signal-to-noise ratio for the class labelling. It can be shown that the maximum separation occurs when

$$\vec{w} = (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1})^{-1} (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0})$$

When the assumptions of LDA are satisfied, the above equation is equivalent to LDA.

Be sure to note that the vector $\vec{w}$ is the normal to the discriminant hyperplane. As an example, in a two dimensional problem, the line that best divides the two groups is perpendicular to $\vec{w}$.

Generally, the data points to be discriminated are projected onto $\vec{w}$; then the threshold that best separates the data is chosen from analysis of the one-dimensional distribution. There is no general rule for the threshold. However, if projections of points from both classes exhibit approximately the same distributions, the good choice would be hyperplane in the middle between projections of the two means, $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0}$ and $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1}$. In this case the parameter c in threshold condition $\vec{w} \cdot \vec{x} < c$ can be found explicitly:

$$c = \vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=0} + \vec{\mu}_{y=1})/2$$

A more condensed form of the difference equation is:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{i=0}^{P} b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^{Q} a_j y[n-j] \right)$$

which, when rearranged, becomes:

$$\sum_{j=0}^{Q} a_j y[n-j] = \sum_{i=0}^{P} b_i x[n-i]$$

To find the transfer function of the filter, we first take the Z-transform of each side of the above equation, where we use the time-shift property to obtain:

$$\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i} X(z)$$

We define the transfer function to be:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j}}$$

Considering that in most IIR filter designs coefficient a_0 is 1, the IIR filter transfer function takes the more traditional form:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{Q} a_j z^{-j}}$$