73030 Insinöörimatematiikka 1 **Molemmat luentoryhmät**

Välitentti 1/Sarja A (viikolla 40, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1a) Laske vektori $\mathbf{w}$, joka on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ ja $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ vastaan, sekä toinen vektori $\mathbf{t}$, joka on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{r} = (1, 0, 1)$ ja $\mathbf{s} = (0, 1, 0)$ vastaan.

1b) Tarkista, ovatko $\mathbf{w}$ ja $\mathbf{t}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan.

2a) Muodosta yhtälö suoralle, joka kulkee origon kautta ja on kohtisuorassa tasoa $3x - y + 4z = 3$ vastaan.

2b) Missä pisteessä kyseinen suora leikkaa annetun tason?

73030 Insinöörimatematiikka 1 **S, M, Au, R, Ti / Vehmanen**

Välitentti 1/Sarja D (viikolla 40, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1a) Laske pistetuloa käyttäen vektoreiden $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ ja $\mathbf{w} = (3, 1, 2)$ välisen kulman φ kosini.

1b) Laske ristituloa käyttäen a-kohdan vektoreiden välisen kulman φ sini.

1c) Tarkista, että laskemasi sini- ja kosiniarvot toteuttavat yhtälön $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

2a) Muodosta yhtälö tasolle, joka on kohtisuorassa suoraa $\mathbf{x} = t\,(2, -3, 4)$ vastaan ja kulkee pisteen $(3, -2, 7)$ kautta.

2b) Missä pisteessä annettu suora leikkaa kyseisen tason?

73030 Insinöörimatematiikka 1 **Molemmat luentoryhmät**

Välitentti 2/Sarja A (viikolla 43, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1a) Käyrän $\mathbf{f}(\theta) = x(\theta)\,\mathbf{i} + y(\theta)\,\mathbf{j}$ pituudelle välillä $\alpha \le \theta \le \beta$ tunnetaan kaava

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta$$

Minkä muodon kaava saa tapauksessa $x(\theta) = g(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = g(\theta)\sin\theta$? "Laske" integraalia niin pitkälle kuin mahdollista.

1b) Edeltävä tapaus koskee nimenomaan napakoordinaateilla esitettyä käyrää. Laske pituus käyrälle $r = 3\sin\theta$, kun $0 \le \theta \le \pi/2$.

2a) Laske funktion

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kun} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0, \quad \text{kun} & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

raja-arvo origossa (jos sellainen on) TAI perustele, että raja-arvoa ei ole (jos ei ole).

2b) Onko a-kohdan funktiolla osittaisderivaatat origossa? Perustele.

[**Neuvo b**-kohtaan: Tutki osittaisderivaattoja määritelmiinsä perustuen, erotusosamäärien raja-arvoina. (Osoittautuisi nimittäin, jos laskisit tuosta vain derivoiden, että osittaisderivaatoilla ei ole raja-arvoa origossa, ne eivät ole jatkuvia origossa.)]

73030 Insinöörimatematiikka 1 **Molemmat luentoryhmät**

Välitentti 2/Sarja B (viikolla 43, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1a) Käyrän $\mathbf{f}(\theta) = x(\theta)\,\mathbf{i} + y(\theta)\,\mathbf{j}$ pituudelle välillä $\alpha \le \theta \le \beta$ tunnetaan kaava

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta$$

Minkä muodon kaava saa tapauksessa $x(\theta) = h(\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = h(\theta)\sin\theta$? "Laske" integraalia niin pitkälle kuin mahdollista.

1b) Edeltävä tapaus koskee nimenomaan napakoordinaateilla esitettyä käyrää. Laske pituus käyrälle $r = 5\cos\theta$, kun $0 \le \theta \le \pi/2$.

2a) Laske funktion

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kun} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{kun} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

raja-arvo origossa (jos sellainen on) TAI perustele, että raja-arvoa ei ole (jos ei ole).

2b) Onko a-kohdan funktiolla osittaisderivaatat origossa? Perustele.

[**Neuvo b**-kohtaan: Tutki osittaisderivaattoja määritelmiinsä perustuen, erotusosamäärien raja-arvoina. (Osoittautuisi nimittäin, jos laskisit tuosta vain derivoiden, että osittaisderivaatoilla ei ole raja-arvoa origossa, ne eivät ole jatkuvia origossa.)]

73030 Insinöörimatematiikka 1 **S, M, Au, R, Ti / Vehmanen**

Välitentti 2/Sarja C (viikolla 43, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1a) Olkoon $\mathbf{f}'(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} + (\sin t)\,\mathbf{k}$ ja $\mathbf{f}(\pi/2) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Mitä on $\mathbf{f}(t)$?

1b) Tutkiskele voiko funktion $\mathbf{g}(t) = (\sin t)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + (1+\cos t)\,\mathbf{k}$ tapauksessa mikään luku s toteuttaa yhtälöä $\mathbf{g}(\pi/2) - \mathbf{g}(0) = \mathbf{g}'(s)\,(\pi/2 - 0)$. <u>Perustele</u> mielipiteesi!

2a) Laske funktion

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{kun} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, \quad \text{kun} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

raja-arvo origossa (jos sellainen on) TAI perustele, että raja-arvoa ei ole (jos ei ole).

2b) Onko a-kohdan funktiolla osittaisderivaatat origossa? Perustele.

[**Neuvo b-kohtaan:** Tutki osittaisderivaattoja määritelmiinsä perustuen, erotusosamäärien raja-arvoina. (Osoittautuisi nimittäin, jos laskisit tuosta vain derivoiden, että osittaisderivaatoilla ei ole raja-arvoa origossa, ne eivät ole jatkuvia origossa.)]

73030 Insinöörimatematiikka 1 **S, M, Au, R, Ti / Vehmanen**

Välitentti 2/Sarja D (viikolla 43, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1a) Olkoon $\mathbf{g}'(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} - (\sin t)\,\mathbf{k}$ ja $\mathbf{g}(\pi/2) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Mitä on $\mathbf{g}(t)$?

1b) Tutkiskele voiko funktion $\mathbf{f}(t) = (1+\sin t)\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - (\cos t)\,\mathbf{k}$ tapauksessa mikään luku s toteuttaa yhtälöä $\mathbf{f}(\pi/2) - \mathbf{f}(0) = \mathbf{f}'(s)\,(\pi/2 - 0)$. Perustele mielipiteesi!

2a) Laske funktion

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & \text{kun} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{kun} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

raja-arvo origossa (jos sellainen on) TAI perustele, että raja-arvoa ei ole (jos ei ole).

2b) Onko a-kohdan funktiolla osittaisderivaatat origossa? Perustele.

[**Neuvo b**-kohtaan: Tutki osittaisderivaattoja määritelmiinsä perustuen, erotusosamäärien raja-arvoina. (Osoittautuisi nimittäin, jos laskisit tuosta vain derivoiden, että osittaisderivaatoilla ei ole raja-arvoa origossa, ne eivät ole jatkuvia origossa.)]

73030 Insinöörimatematiikka 1 **Molemmat luentoryhmät**

Välitentti 3/Sarja C (viikolla 46, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1. Funktiolle

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{kun} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, \quad \text{kun} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

saatiin viime kokeissa osittaisderivaatoiksi origossa $f_x(0, 0) = 1$ ja $f_y(0, 0) = 0$. (Nyt niitä **ei tarvitse** laskea). Mikä tulee funktion f suunnatuksi derivaataksi origossa vektorin $\mathbf{u} = (\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}})$ suuntaan, jos se lasketaan

a) kaavalla $$f'_{\mathbf{u}}(0)=\nabla f(0)\bullet\mathbf{u}$$ [2 pistettä]

b) raja-arvona $$f'_{\mathbf{u}}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h\mathbf{u})-f(0)}{h}$$ [4 pistettä]

2 3

5 6

8 9

[Ei tullut samoja vastauksia, eikä pitänytkään, koska funktio ei ole differentioituva origossa. Opetus: uskokaa nyt, että nämä erotusosamäärien raja-arvot eivät ole määritelminä kiusan vuoksi. — Sitäpaitsi, mitä olisi nopeus hetkellä t, ellei keskinopeuden raja-arvo, erotusosamäärän raja-arvo.]

Jatkuu kääntöpuolella!

2. Ratkaise yhtälöryhmä $AB\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

73030 Insinöörimatematiikka 1 **Molemmat luentoryhmät**

Välitentti 4/Sarja A (viikolla 49, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1. Oletetaan, että vektorit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \neq \mathbf{0}$ ovat annetut ja kohtisuorassa toisiaan vastaan, $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$. Oletetaan myös annetuksi sellainen vektori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, että yhtälö $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ voi toteutua. Johda laskukaavat skalaarikertoimille α ja β. **Ohje:** Katso $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \ldots$ ja keksi itse loput.

2a) Onko alla olevilla determinanteilla sama arvo? <u>Perustele</u>. (Voit joko laskea molemmat determinantit — mikä on turhan työlästä — tai käyttää determinanttien muunteluominaisuuksia.)

[4 pistettä]

$$\begin{vmatrix} 16 & 15 & 14 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 16 & 1 & 1 & 13 \\ 12 & 1 & 1 & 9 \\ 8 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2b) Mikä on oikeanpuoleisen determinantin arvo?

[2 pistettä]

73030 Insinöörimatematiikka 1 **S, M, Au, R, Ti / Vehmanen**

Välitentti 4/Sarja C (viikolla 49, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1. Oletetaan, että vektorit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \neq \mathbf{0}$ ovat annetut ja kohtisuorassa toisiaan vastaan, $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$. Oletetaan myös annetuksi sellainen vektori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, että yhtälö $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ voi toteutua. Johda laskukaavat skalaarikertoimille α ja β. **Ohje:** Katso $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \ldots$ ja keksi itse loput.

2) Viereistä matriisiyhtälöä ei tarvitse ratkaista. Siitä vain kysytään pari asiaa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jos matriisin determinantti olisi $= 12$,
niin mitä voitaisiin päätellä

a) annetun yhtälö(ryhmä)n ratkaisun olemassaolosta ja yksikäsitteisyydestä?

b) samalla kerroinmatriisilla varustetun homogeenisen yhtälö(ryhmä)n ratkaisusta?

c) kerroinmatriisin käänteismatriisin olemassaolosta?

73030 Insinöörimatematiikka 1 **S, M, Au, R, Ti / Vehmanen**

Välitentti 4/Sarja D (viikolla 49, 1996)

Nimi	Opiskelijanumero	Koulutusohjelma

1. Oletetaan, että vektorit $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \mathbf{0}$ ja $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \neq \mathbf{0}$ ovat annetut ja kohtisuorassa toisiaan vastaan, $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$. Oletetaan myös annetuksi sellainen vektori $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, että yhtälö $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ voi toteutua. Johda laskukaavat skalaarikertoimille λ ja μ.

Ohje: Katso $\mathbf{c} \bullet \mathbf{a} = \ldots$ ja keksi itse loput.

2) Viereistä matriisiyhtälöä <u>ei</u> <u>tarvitse ratkaista</u>. Siitä vain kysytään pari asiaa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jos matriisin determinantti olisi $= 0$, niin mitä voitaisiin päätellä

a) annetun yhtälö(ryhmä)n ratkaisun olemassaolosta ja <u>yksikäsitteisyydestä</u>?

b) samalla kerroinmatriisilla varustetun <u>homogeenisen</u> yhtälö(ryhmä)n ratkaisusta?

c) kerroinmatriisin <u>käänteismatriisin</u> olemassaolosta?