

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Kirjoita papereihin nimesi, numerosi ja koulutusohjelmasi.

1 a) Derivoi $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, kun $D\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

b) Jos siis $g(y) = \tanh y$, niin $g'(y) = 1 - \tanh^2 y$. Muodosta a-kohdan funktion käänteisfunktion $f(x) = \arctanh x$ derivaatalle lauseke kaavalla

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

- 2 a) Anna kompleksiluvun $z = j$ polaariesitys.
 b) Laske kompleksiluvun $z = j$ kolmannet juuret (kaikki kolme).
 c) Laske kaikkien kolmen juuren summa (sujuvimmin $x+jy$ -esityksistä).

3. Yhdensuuntaisten tasojen $-2x + 2y - 3z = 4$ ja $2x - 2y + 3z = 3$ välinen etäisyys on ensimmäiseltä valitun minkä tahansa pisteen etäisyys toiselta tasolta. Laske etäisyys seuraavan ohjeen mukaan:

Ohje: Kummaltakin tasolta valitaan piste. Niiden yhdysjana(-vektori) projisoidaan vektorille, joka on kohtisuorassa tasojen vastaan. Kysytty etäisyys on saadun projektiiovektorin pituus (= sen skalaarikomponentin itseisarvo). — *Muistitakaan kevennys:*

$$\text{Proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

4. Muodosta yhtälö sellaiselle tasolle, jonka jokaisen pisteen etäisyys tasosta $2x - 2y + 3z = 0$ on 5.

Ohje: Etsi ensin se uuden tason piste, joka on origosta etäisyydellä 5, ja ota se uuden tason kauttakulkupisteeksi.

5. Olkoon $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- a) Tutki (erotusomäärän raja-arvona), onko derivaatta $f_x(0, 0)$ olemassa.
 a) Tutki, onko derivaatalla $f_x(x, y)$ raja-arvo origossa (sitä lähestyttäessä).

6. Erään osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisufunktio $y(x, t)$ on (aluksi) tuntematon. Muuttujan vaihtojen $u = x+ct$, $v = x-ct$ eli $x = (u+v)/2$, $t = (u-v)/(2c)$ kautta saadaan uusi esitys $y((u+v)/2, (u-v)/(2c)) = z(u, v)$. Samalla on nyt $y(x, t) = z(x+ct, x-ct)$. Muodosta tämän (viimeisimmän yhtälön) perusteella lausekkeet derivaatoille a) $y_t(x, t)$ b) $y_{tt}(x, t)$.

7. Sylinterin tilavuus on $V = \pi r^2 h = V(r, h)$, missä r on poikkileikkausympyrän säde ja h on sylinterin korkeus. Olkoot r ja h mitattuja arvoja (paremman puutteessa). Oikeat arvot $r + \Delta r$ ja $h + \Delta h$ ovat tuntemattomia. Mittausvirheet Δr ja Δh aiheuttavat tilavuuteen virheen $\Delta V = V(r + \Delta r, h + \Delta h) - V(r, h)$, jolle käytetään likiarvona kokonaisdifferentiaalia $df = \nabla V \cdot \Delta \mathbf{x}$. a) Muodosta sen lauseke tässä tapauksessa.

[Kokonaisdifferentiaalia käytetään edelleen mm. maksimivirheen arvioimiseen.]

b) Oikeaa virhettä ΔV voitaisiin tarkastella myös kahden muuttujan Δr ja Δh funktion ääriarvotehtävänä. Mitkä olisivat ΔV :n kriittiset pisteet muuttujien Δr ja Δh funktiona?

8 a) Laske integraali $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx$.

Ohje: Vaihda napakoordinaatistoon xy -tasolla.

b) Etsi rajat a-kohdan integraaliin muodossa $\int \int \int z \, dx \, dy \, dz$.

Tenttiin on sinun itse valittava 6 tehtävää edellä olevista.

Puuttuvan ensimmäisen välitentin voi suorittaa tehtävillä 1 ja 2,
 puuttuvan toisen välitentin voi suorittaa tehtävillä 3 ja 4,
 puuttuvan kolmannen välitentin voi suorittaa tehtävillä 5 ja 6,
 puuttuvan neljännen välitentin voi suorittaa tehtävillä 7 ja 8,
 • jos olet niistä etukäteen sopinut.