73035 Insinöörimatematiikka 2
Tentti 13.5.2004

Ei omia taulukoita, kirjallisuutta, muistiinpanoja, laskimia.
Kirjoita papereihin nimesi ja opiskelijanumerosi.
Merkitse myös selvästi, mitä välitenttiä ja/tai lopputenttiä suoritat.
Jos suoritat välitenttiä merkitse myös, mihin luentoryhmään olet osallistunut.

Lopputenttiin kuuluvat tehtävät 2,3,6,8,9

Välitenttitehtävät valitaan seuraavan taulukon mukaan.

Luentoryhmä	1. välitentti	2. välitentti	3. välitentti	4. välitentti
K,Te,Tu (Helenius)	1,2	3,4	5,6	7,8
S,Au,Tle (Perttula)	2,9	3,10	4,6	7,8
Ti (Pirttimäki)	2.b (ks. 2.a), 9	3, 10.a	5,6	7,8
M,R,Y (Vattulainen)	1,2	3,4	5,6	7,8

1. Määritä vakio $k \in \mathbb{R}$ siten, että suorat $r(2,2,1)+(2,0,1)$ ja $s(1,-1,2)+(0,1,k)$ leikkaavat. Mikä on tämä leikkauspiste?

2. Olkoon matriisit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3 \neq 0$$

a) Määritä matriisi B siten, että

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Määritä $\det(BC)$

c) Osoita, että $A^{-1}CB^TAC^{-1} = B$.

Merkintä B^T Williamson-Trotterissa: B^t.

3.a) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus. Määritä lineaarikuvauksen matriisi, kun

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Määritä sellainen vakio $k \in \mathbb{R}$, jos mahdollista, että

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k/4 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Onko matriisi A diagonalisoituva, eli onko matriisin kaikkien ominaisarvojen algebrallinen kertaluku=geometrinen kertaluku?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

5. Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x+1}$ toisen asteen Taylorin polynomi nollassa (=Maclaurinin polynomi). Mikä on maksimivirheen itseisarvo approksimoitaessa funktiota f tällä polynomilla, kun $x \in [0,1]$?

6. Määritellään funktio

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + \sin(xy) + z^2 - z^3$$

Määrää funktion kriittiset pisteet ja tutki, ovatko ne minimi-, maksimi- vai satulapisteitä.

7. Ratkaise differentiaaliyhtälön $\left(\frac{1+x}{y}\right)^2 y' = 1$ alkuehdon $y(1) = 1$ toteuttava ratkaisu.

8. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' + y = 3\sin(x)$ yleinen ratkaisu.

9. $xy-$tason alue S on polaarikoordinaateilla esitettäessä

$$S = \{(r,\theta) \,:\, 0 \leq r \leq \theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Laske

$$\iint_S x^2 + y^2 \, dxdy$$

X = cos cos

10. Olkoon

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja } A = (\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3)$$

a) Määritä A:n käänteismatriisi elementaarisilla vaakarivimuunnoksilla.

b) Vektorin $\mathbf{y}$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{K} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ suhteen on $[\mathbf{y}]_{\mathcal{K}} = [1,-1,-2]^T$. Mitä on $\mathbf{y}$?
Mikä on vektorin $\mathbf{x} = [5,4,3]^T$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{K}$ suhteen?