

73035 Insinöörimatematiikka 2

Tentti 17.5.2005 [EI: M, R, Y eli ei Kimmo Vattulaisen luentoryhmä!]

1. Lasken onton putken $\{(x,y,z) \mid 5 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 6\}$ massa, kun putken tiheysfunktio on $\rho(x,y,z) = z(x^2 + y^2)$.

2. Millä vakion k arvoilla yhtälöryhmällä (*) on (i) äärettömän määrä ratkaisuja (ii) yksikäsitteinen ratkaisu (iii) ei lainkaan ratkaisuja?

$$(*) \begin{cases} x + kz & = -1 \\ x + y + kz & = 1 \\ x + y + k^2z & = k \end{cases}$$

3. Olkoot $n \times n$ -matriisit A ja B ei-singulaarisia. Todista determinantin laskulakien ja käänteismatriisin ominaisuuksien avulla oikeiksi yhtäsuuruudet

(i) $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$ ja (ii) $\det(\text{adj}(A)) = (\det A)^{n-1}$.

Perustele lyhyesti todistuksen jokainen askel.

4. Etsi funktion $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 2xy - z$ kriittisistä pisteistä se, jonka koordinaateista täsmälleen yksi on negatiivinen ja tutki tämän pisteen luonnetta Hessen matriisin avulla.

5. Määrä matriisimenetelmällä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

yleinen ratkaisu. Mikä on alkuehdot $x(0) = 5, y(0) = 2$ toteuttava ratkaisu?

73035 Insinöörimatematiikka 2

Tehtävät eri luentoryhmien korvaaviin välitentteihin 17.5.2005

6. Todista seuraavista neliömatriiseja koskevista väittämistä ne, jotka pitävät paikkansa ja anna vastaesimerkki niistä, jotka eivät yleisesti pidä paikkaansa.

Väitös 1. Jos $A_{n \times n} B_{n \times n} = O_{n \times n}$, niin $B_{n \times n} A_{n \times n} = O_{n \times n}$.

Väitös 2. Jos matriisilla A on käänteismatriisi, myös matriisilla A^T on käänteismatriisi.

Väitös 3. Matriisin $A + B$ käänteismatriisi on $A^{-1} + B^{-1}$.

7. Määrä matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ välittämän lineaarikuvauksen τ_A kuva-avaruus $\text{Im}(\tau_A)$. Minkä avaruuden aliavaruus se on ja mikä on sen dimensio?

8. Etsi sellainen 3×3 -matriisi C , joka diagonalisoi matriisin A lävistäjämatriisiksi D , kun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{pmatrix}. \text{ Ilmoita myös matriisi } D.$$

9. (i) Ratkaise alkuvotehtävä $x^3 + (y(x)+1)^2 y'(x) = 0$, kun $y(0) = 2$.

(ii) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'''(x) + y'(x) = 1$.

10. Mikä on sen lineaarikuvauksen $\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ matriisi, jolle

$$\tau \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a}, \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \text{ ja } \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a}, \text{ missä } \mathbf{a} \text{ on vakiovektori.}$$

11. Muodosta funktion $\tan(x)$ 2. asteen Taylorin polynomi kehityskeskukseksi $\frac{\pi}{4}$.

12. (i) Olkoon

$$B = \begin{bmatrix} \ell & 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & -1 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}. \text{ Laske } \det(B).$$

(ii) Jos 4×4 -matriiseille A ja B pätee $|A| = 2$ ja $|B| = -3$, niin mitä on $|A^4|$, $|2B|$ ja $|AB|$.



Korvaavat välitentit:

TiTe (Esko Turunen)

I välikoe: tehtävät 1 ja 6 II välikoe: tehtävät 3 ja 7 III välikoe: tehtävät 4 ja 8 IV välikoe: tehtävät 5 ja 9

K, Te, Tu (Erkki Pirrtimäki)

I välikoe: tehtävät 1, 2 II välikoe: tehtävät 4 ja 10 III välikoe: tehtävät 8, 11 ja IV välikoe: tehtävät 5, 9

Au, S, Tj, Tle (Antti Perttula)

I välikoe: tehtävät 1 ja 3, II välikoe: tehtävät 2 ja 10, III välikoe: tehtävät 4 ja 8, IV välikoe: tehtävät 5 ja 9.