73045 Fourier'n menetelmät

Tentti 12.5.2005 (... ja välikokeiden korotus: 1. välikoe = tehtävät 1 ja 2, 2. välikoe = tehtävät 3 ja 4, jne.)

- **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
- **Kirjoita papereihin nimesi, numerosi ja koulutusohjelmasi.**

1. Funktion $e(x) = x \quad (0 \le x < 1)$ jaksolliselle jatkeelle tunnetaan Fourier-sarja

$$e(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(n2\pi x)$$

Miten funktio on jatkettu, tutkitaan seuraavassa:

a) Onko jatke (ja sarjan esittämä funktio) parillinen, pariton vai ei kumpaakaan? Perustele.

b) Mikä on jatkeen (ja sarjan esittämän funktion) pienin jakso? Perustele.

c) Esiintyykö Gibbsin ilmiö kohdassa $x = 0$? Perustele.

2. Muodosta ensin parittomaksi ja sitten 4-jaksoiseksi jatketulle funktiolle $h(t) = 1 - t \quad (0 \le t < 2)$ **a)** kompleksinen Fourier-sarja

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}, \quad \text{missä} \quad c_n = \frac{1}{T}\left(\int_d^{d+T} h(t)\cos(n\omega t)\,dt - j\int_d^{d+T} h(t)\sin(n\omega t)\,dt\right),$$

b) trigonometrinen Fourier-sarja **a**-kohdan tuloksesta, kun

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_n^*, \quad b_n = j(c_n - c_n^*).$$

Vihje: Hyödynnä **a**-kohdassa integroitavien parillisuutta ja parittomuutta.

3. Olkoon $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$ olemassa. Koska $\mathcal{F}\{g'(t)\} = (j\omega)\mathcal{F}\{g(t)\}$, on

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{g'(t)\}/(j\omega) \qquad (\text{kun } \omega \ne 0).$$

Funktion $f(t) = g'(t)\}$ integraalifunktion $g(t)$ Fourier-muunnos on siis $G(j\omega) = F(j\omega)/(j\omega)$, jos se on ylipäänsä olemassa. Muunnos on olemassa enintään yhdellä integraalifunktiolla (niistä kaikista, jotka eroavat toisistaan vakiolla). Jos nimittäin funktiolla $g(t)$ on Fourier-muunnos, niin funktiolla $g(t) + C$ ei ole, sillä integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-j\omega t}\,dt$$

ei suppene, kun $C \ne 0$. Tutki, onko olemassa edes ns. Cauchyn pääarvo

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} Ce^{-j\omega t}\,dt, \qquad \text{missä} \qquad e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t.$$

4. Olkoon $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, jolloin $\mathcal{F}\{e^{jat} f(t)\} = F(j(\omega - a))$. Päättele tästä seuraavat (esittäen ensin trigonometriset funktiot eksponenttifunktion avulla):

a) $\mathcal{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\}$, **b)** $\mathcal{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\}$,

c) $\mathcal{F}\{f(t)\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\}$.

Muunnoksen derivaatta ja derivaatan muunnos: Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, niin $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ (jne.) ja $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ (jne).

Siirtolauseet: Jos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, niin $\mathcal{L}\{f(t-a)\,H(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, kun $a \ge 0$, ja $\mathcal{L}\{e^{bt}f(t)\} = F(s-b)$.

5. Tiedetään, että $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$. Päättele tästä käyttäen vain lineaarisuutta ja/tai tehtävän 5 yläpuolella todettuja tuloksia, mitä ovat

a) $\mathcal{L}\{\cos(at)\}$, **b)** $\mathcal{L}\{t\}$, **c)** $\mathcal{L}\{(t-2)H(t-1)\}$.

Esitä vastauksillesi lyhyt perustelu joka kohdassa.

6 a) Piirrä kuva välillä $0 \le t < 3$ funktiosta

$$f(t) = (1-t)[H(t) - H(t-1)] + (2-t)[H(t-1) - H(t-2)] \qquad \text{[1 piste]}$$

b) Ratkaise Laplace-muunnosten ja -käänteismuunnosten avulla alkuarvotehtävä

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \qquad \text{[5 pistettä]}$$