Matriisilaskenta 1
2. Välikoe 16.12.2003 klo 17-19
Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskimia.

1. Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

QR-hajotelma. Vihje: kaavoilla

$$P = I - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2}, \qquad v = x + e^{i\phi}\|x\|e_1,$$

voi olla käyttöä.

2. Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordanin kanoninen muoto. Mitkä ovat ko. matriisin ominaisarvot, niitä vastaavat lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit, ja ominaisarvojen algebralliset ja geomeriset kertaluvut. Vihje:

1. Etsi nxn matriisin A:n erisuuret ominaisarvot. Mieluummin tarkasti.
2. Olkoon β_i ominaisarvo. Laske kullakin ominaisarvolla asteet

$$r_j(\beta_i) = \text{rank}[(A - \beta_i I)^j] \quad 1 \le j \le n$$

Jos $r_k(\beta_i) = r_{k+1}(\beta_i)$, niin $r_j(\beta_i) = r_k(\beta_i)$ jokaisella $j \ge k$.

3. Lasketaan luvut

$$b_1(\beta_i) = n - 2r_1(\beta_i) + r_2(\beta_i)$$

$$b_m(\beta_i) = r_{m+1}(\beta_i) - 2r_m(\beta_i) + r_{m-1}(\beta_i), \ m \ge 2$$

Jordanin kanonisessa muodossa liittyy ominaisarvoon β_i täsmälleen $b_m(\beta_i)$ Jordanin blokkia, joiden koko on mxm.

3. Olkoot **a** ja **b** reaalisia n-vektoreita. Mitkä ovat matriisin **ab*** ominaisarvot ja -vektorit, kun **a≠0**, **b≠0**.

4. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Muodosta matriisin A singulaariarvohajotelma.
b) Mikä on matriisin A matriisinormi ?
c) Muodosta matriisin A pseudoinverssi.