73119 Graafiteoria — Kuulustelu 9.4.2001

Huom! Mukana ei saa olla kirjallisuutta, tietokoneita eikä taulukoita. Laskuvälineet ovat sallittuja.

1. Puussa yhden pisteen (*juuri*) aste on k ja jokaisen muun pisteen aste on yksi tai $k+1$. (Tässä $k > 1$.) Pisteitä joiden aste on yksi kutsutaan *lehdiksi*. Tällaisen puun *korkeus* on pisimmän juuri-lehti-polun pituus. Jos korkeus on h, niin mikä on **a)** suurin, **b)** pienin mahdollinen lehtien määrä? **c)** Jos pisteitä on n kpl, niin paljonko on lehtiä? Perustele vastauksesi! (Tällainen puu on muuten ns. *täydellinen k-äärinen puu.*)

2. Selosta lyhyesti mitä ovat graafin **a)** vieruspistematriisi, **b)** insidenssimatriisi, **c)** irrotusmatriisi, **d)** piirimatriisi, **e)** perusirrotusmatriisi ja **f)** peruspiirimatriisi. (Piste kustakin.)

3. Selosta Unkarilaista algoritmia maksimisovituksen etsimiseksi.

4. Seuraava Warshallin algoritmin modifikaatio etsii suunnatusta graafista $G = (V, E)$ kaikki suunnatut polut ja suunnatut piirit. Jos $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, niin merkitään $\mathcal{P}_{ij}$:llä kaikkien G:n suunnattujen v_i–v_j-polkujen joukkoa ja erityisesti $\mathcal{P}_{ii}$:llä kaikkien niiden G:n suunnattujen piirien joukkoa, joissa on piste v_i. Tehtävänä on siis etsiä $\mathcal{P}_{ij}$:t. Suunnatut polut ja piirit annetaan nuolijonoina $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_l})$. Ja sitten se algoritmi:

1. Asetetaan $k \leftarrow 0$. Asetetaan edelleen $\mathcal{P}_{ij} \leftarrow \emptyset$, jos (v_i, v_j) ei ole G:n nuoli, muutoin asetetaan $\mathcal{P}_{ij} \leftarrow \{(e) \mid e = (v_i, v_j) \text{ on } G\text{:n nuoli}\}$.
2. Jos $k < n$, asetetaan $k \leftarrow k+1$ ja $\mathcal{P}'_{ij} \leftarrow \mathcal{P}_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Muutoin tulostetaan kaikki $\mathcal{P}_{ij}$:t ja lopetetaan.
3. Käydään läpi kaikki sellaiset pisteparit v_i ja v_j, missä $i, j \neq k$, ja tehdään seuraava operaatio. Käydään läpi kaikki suunnatut polut
$$p = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}) \quad \text{ja} \quad q = (e_{j_1}, \ldots, e_{j_l}),$$
missä p on $\mathcal{P}_{ik}$:ssa ja q on $\mathcal{P}_{kj}$:ssä. (Huomaa, että silloin e_{i_1}:n alkupiste on v_i ja e_{i_m}:n loppupiste v_k, ja e_{j_1}:n alkupiste on v_k ja e_{j_l}:n loppupiste v_j.) Jos p:llä ja q:lla ei ole muita yhteisiä pisteitä kuin v_k ja mahdollisesti $v_i = v_j$ (mikäli $i = j$), asetetaan
$$\mathcal{P}'_{ij} \leftarrow \mathcal{P}'_{ij} \cup \{(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_l})\}.$$
4. Asetetaan $\mathcal{P}_{ij} \leftarrow \mathcal{P}'_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ ja mennään kohtaan 2.

Totea, että algoritmi toimii.

5. Testaa Demoucronin algoritmilla, onko alla oleva graafi tasottuva ja positiivisessa tapauksessa piirrä se tasograafiksi. Vastauksen näkee tässä melkeinpä suoraankin. Tarkoitus onkin testata osaatko Demoucronin algoritmin, joten selosta yksityiskohtaisesti mitä kussakin vaiheessa teet.