73126 Stokastiset Prosessit
Tentti 17.11.2003

Tentissä kirjallisen materiaalin käyttö on sallittu.

1. Olkoon $\mathbf{x}_n$ äärellistilainen Markovin ketju. Oletetaan, että on olemassa sellainen tila k, että yhden askeleen siirtymätodennäköisyys $p_{ik} = q$ kaikilla tiloilla i.

Osoita, että $P(\mathbf{x}_n = k) = q$ kaikilla ajanhetkillä $n \geq 1$.

2. Olkoot $\mathbf{x}_t$ ja $\mathbf{y}_t$, $t \in \mathbb{R}$, riippumattomia stationäärisiä reaaliarvoisia stokastisia prosesseja autokorrelaatiofunktiona $r_\mathbf{x}$ ja $r_\mathbf{y}$. Laske prosessien $\mathbf{z}_t = a\mathbf{x}_t + b\mathbf{y}_t$ ja $\mathbf{v}_t = \mathbf{x}_t\mathbf{y}_t$ autokovarianssifunktio, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ovat annettuja vakioita. Onko $\mathbf{z}_t$ stationäärinen? Entä $\mathbf{v}_t$?

3. Olkoon $r_\mathbf{x}$ 0-keskeisen stokastisen prosessin $\mathbf{x}_t$ autokovarianssifunktio. Osoita, että jos $r_\mathbf{x}$ on jatkuva jokaisessa pisteessä $(t,t) \in T \times T$, niin se on jatkuva koko $T \times T$:ssä ts. jokaisessa pisteessä $(s,t) \in T \times T$.

Vihje: lauseet 5.2.3 ja 5.2.9.

4. Olkoon $\mathbf{w}_t$, $t \geq 0$, Wiener prosessi. Osoita määritelmän nojalla, että $\mathbf{w}_t$ on jatkuva. Onko se derivoituva? Entä integroituva yli välin [0,1]? Perustele vastauksesi!!