

Huomi! Mukana ei saa olla kirjallisuutta, tietokoneita eikä taulukoita. Laskuvälineet ovat sallittuja.

1. Funktio $y = g(x)$ määritellään implisiittisesti yhtälöllä $F(y, x) = 0$, ts. $F(g(x), x)$ on identtisesti $= 0$. Pisteessä $x = a$, $y = b$, jossa $F(b, a) = 0$, tunnetaan F :n Taylorin sarjan

$$F(y, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} (y - b)^i (x - a)^j$$

kertoimet c_{ij} , arvoille $i + j \leq N$. Nämä annetaan listojen listana C , jonka i :nnessä alkiossa on sarjan termien $(y - b)^{i-1} (x - a)^j$ ($j = 0, \dots, N - i + 1$) kertoimet järjestyksessä listana. Totea, että alla oleva Maple-ohjelma laskee $g(x)$:n Taylorin sarjan $N + 1$ termiä pisteessä $x = a$ ja kerro miten se toimii.

```
taylorsolve:=proc(C, a, b, N)
  local y, r, z, c, t, s, i, j, eqn;
  y:=b;
  for r from 1 to N do
    z:=y+c[r]*t^r-b;
    s:=add(add(C[i+1, j+1]*t^j*z^i, i=0..r-j), j=0..r);
    eqn:=collect(expand(s), t);
    c[r]:=solve(coeff(eqn, t^r), c[r]);
    y:=y+c[r]*t^r;
  od;
  subs(t=x-a, y);
end;
```

(Huomattakoon, että ellei Maple saa ratkaistuksi $g(x)$:ää eksplisiittisesti, ei sen avulla Taylorin kertoimia saada mitenkään helposti muutenkaan. Tällaiset ohjelmat ovat siis tarpeen! Monen muuttujan Taylorin kehitelmiä Maple nimittäin osaa kyllä laskea.)

2. Jos R on rengas, muodostetaan parit (n, a) , missä n on kokonaisluku ja a on R :n alkio. Määrittele näille pareille yhteen- ja kertolasku siten, että tuloksena on 1-rengas, jossa R on alirenkaana (samaistuksen kautta). (Ykkösalkion puuttuminen renkaasta ei siis ole sinällään mikään pulma, se voidaan siihen formaalisesti lisätä.)
3. Selosta lyhyesti mitä ovat **a)** kokonaisalue, **b)** UFD, **c)** PID ja **d)** ED.
4. Selosta Hermiten menetelmää $\mathbb{Q}(x)$:n funktioiden integroimiseksi.
5. Miten lasketaan $\sum p(n) \delta n$, missä $p(x)$ on kunnan K polynomirenkaan $K[x]$ polynomi?