Autek

TTKK 7604120 Systeemiteorian erityiskysymyksiä
Kalman suodatus, tiedonsiirtorajoitteinen säätö, syksy 2000
Tentti 21.12.2000

Tentissä sallittu kurssikohtainen materiaali:
Luentomonisteet: Stochastic Control and Communication Limited Control / P.Mäkilä
Aström-Wittenmark : Computer-Controlled Systems (kirja), sekä
vapaasti muita kirjoja.
Lisäksi muut kaikissa tenteissä yhteisesti sallitut apuvälineet.

Menestystä ja Hauskaa Joulua!
t. Pertti Mäkilä, ACI

TTKK 7604120 Systeemiteorian erityiskysymyksiä
Tentti 21.12.2000 (max 24 p)

1. Satunnaisvektori (max 6 p)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

on normaalijakautunut, odotusarvolla

$$m_x = \begin{pmatrix} 8.0 \\ 11.4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ja kovarianssimatriisilla

$$R_x = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.5 \\ -0.5 & 2.5 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Mittauslaitteella voidaan mitata

$$y = -1.0x_1 + 2.0x_2 + e \tag{4}$$

jossa e on riippumaton x_1:stä ja x_2:sta ja normaalijakautunut odotusarvolla 0 ja varianssilla 4.

Mitattaessa saatiin y:lle arvo $y = 15.9$. Määrää x:n minimivarianssiestimaatti ja estimointivirheen kovarianssimatriisi.

2. Tarkastele tilasysteemiä (max 3+3=6 p)

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \tag{5}$$
$$y(t) = Cx(t) + v(t) \tag{6}$$

jossa x on systeemin tila, u on säätösuure, y on mittaussuure, sekä $\{w(t)\}$, $\{v(t)\}$ toisistaan riippumattomia normaalijakautuneita valkoisia kohinaprosesseja, odotusarvoilla 0 ja kovarianssimatriiseilla $E\,w(t)w(t)^T = R_1$, $E\,v(t)v(t)^T = R_2$.

Olkoon $P(t|t-1)$ prediktoivan Kalman suodattimen tilaestimointivirheen kovarianssimatriisi hetkellä t (ts $P(t|t-1) = E\,[x(t) - \hat{x}(t|t-1)][x(t) - \hat{x}(t|t-1)]^T$ käyttäen luentojen merkintöjä). Vastaavasti olkoon $P(t|t)$ suodattavan Kalman suotimen tilaestimointivirheen kovarianssimatriisi hetkellä t. Olkoon lisäksi $P(t_0|t_0-1) = R_0$, jossa t_0 on jokin annettu alkuajanhetki ja R_0 annettu positiivisesti semidefiniitti matriisi.

a) Perustele ensin sanallisesti miksi on luontevaa ajatella että

$$P(t|t) \leq P(t|t-1) \quad \text{kaikilla} \quad t = t_0, t_0+1, \ldots. \tag{7}$$

(Yllä merkintä $\leq$ tarkoittaa sitä että matriisi $P(t|t-1) - P(t|t)$ on (symmetrinen) positiivisesti semidefiniitti matriisi.)

b) Perustele a)-kohdan matriisirelaatio käyttämällä Kalman suodatuksen estimointivirheitten kovarianssimatriiseille johdettuja kaavoja.

3. Tarkastele systeemiä (max 6 p)

$$y(t+1) + a_1 y(t) = e(t+1), \tag{8}$$

jossa y on ulostulo, $\{e(t)\}$ on valkoinen kohinaprosessi (odotusarvo $= 0$) ja a_1 on tunnettu luku. Mikä on paras (pienimmän estimointivirheen varianssin mielessä) lineaarinen suodatin (prediktori) suureelle $y(t+1)$ perustuen informaation $\{y(t), y(t-1), \ldots\}$.

4. Tarkastellaan jaksollista tilasysteemiä (max 6 p)

$$x(t+1) = A(t)x(t), \tag{9}$$

jossa

$$A(3k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 140 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

$$A(3k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 110 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

sekä

$$A(3k+2) = \begin{pmatrix} 0.00007 & 0 \\ 0 & 0.00005 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

Onko tämä systeemi stabiili vai epästabiili? Perustele.