TTKK	Digitaalinen säätö	Pertti Raiskila
76260	Tentti 08.05.2000	

Laita **jokaiseen** palauttamaasi konseptiin otsikkoalue, jossa näkyy nimesi, opiskelijanumerosi sekä päiväys ja "Tentti, Automaatiotekniikan matematiikka".

Tentissä saa olla apuna kirja "Jouko Virkkunen: Säätötekniikan matematiikkaa, Otatieto 884". Kirjasta otettu valokopio ei kelpaa. Taskulaskin sallittu.Tentti kestää 3 tuntia. Jaettua taulukkomateriaalia saa käyttää.

0. Minä vuonna olet suorittanut aktiivisuustehtävät?

1. Vastaa omin sanoin (lyhyesti) seuraaviin kysymyksiin:

a) Mikä on regulaatio-ongelma? (1p)
b) Mikä on servo-ongelma? (1p)
c) Mikä on nollannen kertaluvun pitopiiri? (1p)
d) Mikä on järjestelmän sensitiivisyysfunktio? (1p)
e) Mitä tarkoittaa asymptoottinen stabiilisuus? (1p)
f) Mikä on tilansiirtomatriisi? (1p)

2. Oletetaan, että aikajatkuva järjestelmä (CT) on muotoa

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Järjestelmästä muodostetaan nollannen kertaluvun pitopiirillä diskreetti näytteenottojärjestelmä (näytteenottoväli on h) DT:

$$\mathbf{x}(kh+h) = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}(kh) + \mathbf{\Gamma}u(kh)$$
$$y(kh) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kh).$$

Vastaa seuraaviin väitteisiin vaihtoehdoilla 0,1,2 tai 3. Kustakin oikeasta vastauksesta ("arvauksesta") saa +1 pistettä ja väärästä –1 pistettä. Kokonaissaldo tehtävästä **2** ei kuitenkaan voi olla negatiivinen. Vaihtoehdot ovat seuraavat:

0) en tiedä enkä arvaa (0 pistettä)
1) pitää paikkansa kaikilla h:n arvoilla (h>0)
2) pitää paikkansa lukuunottamatta muutamia tiettyjä irrallisia h:n arvoja
3) 1 ja 2 väittämät ovat molemmat väärässä.

Väittämät ovat:
a) CT on stabiili $\Rightarrow$ DT on stabiili
b) CT on epästabiili $\Rightarrow$ DT on epästabiili
c) CT:llä on epästabiili inverssi $\Rightarrow$ DT:llä on epästabiili inverssi
d) CT:llä on stabiili inverssi $\Rightarrow$ DT:llä on stabiili inverssi
e) CT on tarkkailtavissa $\Rightarrow$ DT on tarkkailtavissa
f) CT:n napa-nolla ylijäämä on r $\Rightarrow$ DT:n napa-nolla ylijäämä on r.

Käännä!

3. Olkoon diskreetti järjestelmä muotoa

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).$$

Suunnittele lineaarinen tilatakaisinkytkentäsäätö u(k)= -Lx(k) siten, että
a) Suljetun järjestelmän navat ovat 0.1 ja 0.25 (4p)
b) Kyseessä on ns. Deadbeat-säätö. (2p)

4. Järjestelmää kuvaa seuraava diskreetti tilayhtälö

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} u(k), \qquad y(k) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

a) Mitkä ovat ko. järjestelmän pulssisiirtofunktiot H(q) ja $H^*(q^{-1})$? (3p)
b) Mikä on ko. järjestelmän stationäärinen vahvistus? (1p)
c) Onko järjestelmä ohjattavissa? Perustele! (1p)
d) Onko järjestelmä tarkkailtavissa? Perustele! (1p)

5. Toisen asteen järjestelmä (karakteristinen yhtälö on $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$) on stabiili, jos
$1^0 \quad a_2 < 1 \qquad 2^0 \quad a_2 > -1 + a_1 \qquad 3^0 \quad a_2 > -1 - a_1$.

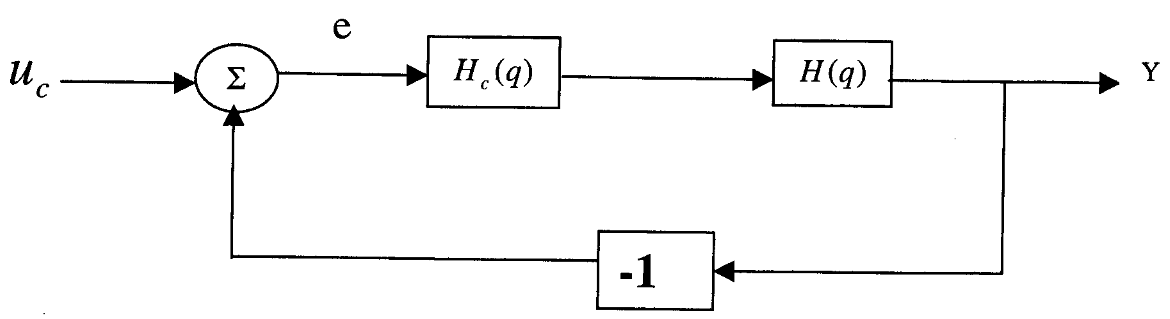
Negatiivisesti takaisinkytkettyä järjestelmää $H(q) = \dfrac{1}{q(q-1)}$ säädetään algoritmilla

a) $H_c(q) = K, \quad K > 0$ (P-säätö) (3p)

b) $H_c(q) = \dfrac{Kq}{q-1}, \quad K > 0$ (I-säätö). (3p)

Millä K.n arvoilla suljettu säätöjärjestelmä kuvassa 1 on stabiili ja mikä on jatkuvuustilan säätövirhe e(∞), kun sisäänmenona on yksikköaskelfunktio u_c?

Laske sekä **a)** että **b)** kohdat.



Kuva 1. Suljetun järjestelmän lohkokaavio

Käännä!

Table 2.1 Zero-order hold sampling of a continuous-time system, $G(s)$. The table gives the zero-order-hold equivalent of the continuous-time system, $G(s)$, preceded by a zero-order hold. The sampled system is described by its pulse-transfer operator. The pulse-transfer operator is given in terms of the coefficients of

$$H(q) = \frac{b_1 q^{n-1} + b_2 q^{n-2} + \cdots + b_n}{q^n + a_1 q^{n-1} + \cdots + a_n}$$

$G(s)$	$H(q)$ or the coefficients in $H(q)$
$\frac{1}{s}$	$\frac{h}{q-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{h^2(q+1)}{2(q-1)^2}$
$\frac{1}{s^m}$	$\frac{q-1}{q} \lim_{a\to 0} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a^m}\left(\frac{q}{q-e^{-ah}}\right)$
e^{-sh}	q^{-1}
$\frac{a}{s+a}$	$\frac{1-\exp(-ah)}{q-\exp(-ah)}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$b_1 = \frac{1}{a}(ah - 1 + e^{-ah})$ $\quad b_2 = \frac{1}{a}(1 - e^{-ah} - ahe^{-ah})$ $a_1 = -(1+e^{-ah})$ $\quad a_2 = e^{-ah}$
$\frac{a^2}{(s+a)^2}$	$b_1 = 1 - e^{-ah}(1+ah)$ $\quad b_2 = e^{-ah}(e^{-ah} + ah - 1)$ $a_1 = -2e^{-ah}$ $\quad a_2 = e^{-2ah}$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{(q-1)he^{-ah}}{(q-e^{-ah})^2}$
$\frac{ab}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{b(1-e^{-ah}) - a(1-e^{-bh})}{b-a}$ $b_2 = \frac{a(1-e^{-bh})e^{-ah} - b(1-e^{-ah})e^{-bh}}{b-a}$ $a_1 = -(e^{-ah} + e^{-bh})$ $a_2 = e^{-(a+b)h}$
$\frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{e^{-bh} - e^{-ah} + (1-e^{-bh})c/b - (1-e^{-ah})c/a}{a-b}$ $b_2 = \frac{c}{ab}e^{-(a+b)h} + \frac{b-c}{b(a-b)}e^{-ah} + \frac{c-a}{a(a-b)}e^{-bh}$ $a_1 = -e^{-ah} - e^{-bh}$ $\quad a_2 = e^{-(a+b)h}$
$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	$b_1 = 1 - \alpha\left(\beta + \frac{\zeta\omega_0}{\omega}\gamma\right)$ $\quad \omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ $\quad \zeta < 1$ $b_2 = \alpha^2 + \alpha\left(\frac{\zeta\omega_0}{\omega}\gamma - \beta\right)$ $\quad \alpha = e^{-\zeta\omega h}$ $= e^{-\zeta\omega_0 h}$ $a_1 = -2\alpha\beta$ $\quad \beta = \cos(\omega h)$ $a_2 = \alpha^2$ $\quad \gamma = \sin(\omega h)$
$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	$b_1 = \frac{1}{\omega}e^{-\zeta\omega_0 h}\sin(\omega h)$ $\quad b_2 = -b_1$ $a_1 = -2e^{-\zeta\omega_0 h}\cos(\omega h)$ $\quad a_2 = e^{-\zeta\omega_0 h}$ $\omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$
$\frac{a^2}{s^2+a^2}$	$b_1 = 1 - \cos ah$ $\quad b_2 = 1 - \cos ah$ $a_1 = -2\cos ah$ $\quad b_2 = 1 - \cos ah$ $a_2 = 1$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$b_1 = \frac{1}{a}\sin ah$ $\quad b_2 = \frac{-1}{a}\sin ah$ $a_1 = -2\cos ah$ $\quad a_2 = 1$
$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$b_1 = \frac{1-\alpha}{a^2} + h\left(\frac{h}{2} - \frac{1}{a}\right)$ $\quad \alpha = e^{-ah}$ $b_2 = (1-\alpha)\left(\frac{h^2}{2} - \frac{2}{a^2}\right) + \frac{h}{a}(1+\alpha)$ $b_3 = (1-\cancel{\alpha})\left[\frac{1}{a^2}(\alpha-1) + \alpha h\left(\frac{h}{2} + \frac{1}{a}\right)\right]$ $a_1 = -(\alpha+2)$ $\quad a_2 = 2\alpha + 1$ $\quad a_3 = -\alpha$

Lause 1. Jos

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + h \quad , t \geq 0$$

A ja h vakioita

niin

$$x(t) = e^{At}\,x(0) + \int_0^t e^{A\tau}\,d\tau\ h$$

Lause 2. Jos

$$q\,x_k = -a_k\,x_1 + x_{k+1} + b_k\,u \ ; \ k = 1, \dots, n-1$$
$$q\,x_n = -a_n\,x_1 + b_n\,u$$

niin

$$(q^n + a_1\,q^{n-1} + \dots + a_n)\,x_1 = (b_1\,q^{n-1} + \dots + b_n)\,u$$

Aputuloksia :

$$a\,s^2 + b\,s + c = 0 \quad ; \quad s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a \neq 1 \ : \ \sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{1-a^n}{1-a}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$j^2 = -1 \ : \ \exp(j\,a) = \cos(a) + j\sin(a) = 1 + 2j\sin(\tfrac{a}{2})\exp(\tfrac{ja}{2})$$

$$\int_0^\infty \dot{f}(t)\,e^{-st}\,dt = s\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt - f(0)$$

Siirtofunktiosta tilamuotoon

Korkean kertaluvun differentiaaliyhtälöistä tai sellaisten ryhmistä voidaan siirtyä tilamuotoon monin tavoin. Yksinkertaisin menettely perustuu siirtofunktion käyttöön. Seuraavassa oletetaan, että u ja y ovat skalaarifunktiota. Kyseessä on siis yhden skalaaritulosuureen ja yhden skalaarilähtösuureen järjestelmä (SISO).

Differentiaaliyhtälön laplacemuotoinen siirtofunktio on

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + \overline{b}_1 s^{n-1} + \ldots + \overline{b}_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Siirtofunktio on aito, mutta ei vahvasti aito, jos $b_0 \neq 0$. Jakolaskulla saadaan

$$G(s) = b_0 + \frac{b_1 s^{n-1} + \ldots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Siirtofunktiota vastaa tilaesitys

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \\ y &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + du \end{aligned}$$

Koska tulo- ja lähtösuure ovat skalaarifunktioita, ovat $\boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ vektoreita ja suoravaikutusmatriisi $\boldsymbol{D}$ on vakio $d = b_0$.

Siirtofunktiota vastaavia tilaesityksiä on rajattomasti. Kaksi ilman laskutoimituksia muodostettavaa ovat havaittavuuskanoninen ja ohjattavuuskanoninen muoto, ($d = 0$).

Havaittavuuskanoninen muoto on

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ohjattavuuskanoninen muoto on

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix}.$$

Nämä tilamuodot saadaan siis siirtofunktiosta ilman laskutoimituksia. Niillä on tärkeä teoreettinen merkitys, mutta numeerisessa laskennassa ne ovat häiriöherkkiä – kuten polynomit. Niitä on varottava, jos suunnilleen $n > 5$ ja erityisesti, jos siirtofunktiolla on moninkertaisia napoja.

Laplasemuunnoksen teoreemoja

Määritelmä: $F(s) = L\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
$F(s)$	$f(t)$	T1
$C_1F_1(s) + C_2F_2(s)$	$C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$	T2
$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	T3
$e^{-as}F(s)$	$\begin{cases} 0; & t \le a \\ f(t-a); & t > a \end{cases}$	T4
$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	T5
$-\frac{d}{ds}F(s)$	$f(t)t$	T6
$\int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$	$f(t)\frac{1}{t}$	T7
$F_1(s)F_2(s)$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$	T8
$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$	T9
$s^2F(s) - [sf(0) + f'(0)]$	$f''(t)$	T10
$s^nF(s) - [s^{n-1}f(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)]$	$f^{(n)}(t)$	T11
$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right]_{t=+0}$	$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	T12

Mikäli $f(t)$:n ja $F(s)$:n raja-arvot ovat olemassa, niin niille pätee:

$$\lim_{s\to 0}\{sF(s)\} = \lim_{t\to\infty}\{f(t)\} \qquad \lim_{s\to\infty}\{sF(s)\} = \lim_{t\to 0}\{f(t)\}$$

Laplacemuunnos ja aikavasteita

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
1	$\delta(t)$	M1
$\frac{1}{s}$	1	M2
$\frac{1}{s^2}$	t	M3
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	M4
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	M5
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	M6
$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	M7
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	M8
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{-bt}-e^{-at})$	M9
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab(b-a)}(ae^{-bt}-be^{-at})$	M10
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$	M11
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	M12
$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\sin(at)$	M13
$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\cos(at)$	M14
$\frac{s+a}{s+b}$	$\delta(t)+(a-b)e^{-bt}$	M15

Routhin kaavio

Mielivaltaista astelukua olevan polynomin juurten sijaintia kompleksitason positiivisessa ja negatiivisessa puolitasossa voidaan tutkia Routhin kaaviolla:

Polynomi: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$

Kaavio:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
\hline
s^{n-2} & b_0 & b_1 & \cdots & \\
s^{n-3} & c_0 & c_1 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^0 & z_0 & & &
\end{array}
$$

Kaavion alkio z_n lasketaan kaavalla: $$z_n = \frac{y_0 x_{n+1} - x_0 y_{n+1}}{y_0} = x_{n+1} - x_0 \frac{y_{n+1}}{y_0}$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\vdots & \vdots & & & & & \\
s^{i+2} & x_0 & \cdots & \cdots & x_{n+1} & \cdots \\
s^{i+1} & y_0 & \cdots & \cdots & y_{n+1} & \cdots \\
s^i & \vdots & & z_n & & \\
\vdots & \vdots & & & &
\end{array}
$$

1° Oikeassa puolitasossa olevien juurten lukumäärä on kaavion ensimmäisen sarakkeen merkinvaihtojen lukumäärä.

2° Jos polynomin jokin kerroin on negatiivinen, vähintään yksi juuri on oikeassa puolitasossa tai imaginääriakselilla.

3° Jos polynomin jokin kerroin puuttuu eli on nolla, vähintään yksi juuri on imaginääriakselilla.

4° Jos kaaviota muodostettaessa sen ensimmäiseen sarakkeeseen tulee nolla, sijoitetaan sen tilalle pieni positiivinen luku $\varepsilon > 0$ ja jatketaan kaavion muodostamista. Lopullisesta kaaviosta voidaan laskea merkinvaihdot tutkimalla ε:sta riippuvien termien raja-arvot, kun $\varepsilon \to 0$.

5° Mikäli kaavioon tulee koko rivi nollia, ylemmästä rivistä voidaan muodostaa polynomi, jolla alkuperäinen polynomi on jaollinen.

Juuriuran muodostamissäännöt

Seuraavat säännöt on johdettu järjestelmälle, jonka avoimen silmukan siirtofunktiolle $G_{OL}(s)$ ja säädetyn järjestelmän karakteristiselle yhtälölle KY pätee:

$$G_{OL}(s) = K\frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \text{KY:} \quad 1 + G_{OL}(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + K\frac{P(s)}{Q(s)} = 0$$

K	Tarkasteltava parametri, joka muuttuu nollasta äärettömään
s_{Pi}/s_{Zi}	Avoimen silmukan navan/nollan i lukuarvo
P/Z	Avoimen silmukan napojen/nollien lukumäärä
$\angle P_i/\angle Z_i$	Avoimen silmukan navan/nollan i ja tarkstelupisteen yhdistävän suoran ja positiivisen reaaliakselin välinen kulma

Yleiset ehdot:

Itseisarvoehto: $|G_{OL}(s_{Pi})| = 1$

Kulmaehto: $\angle\{G_{OL}(s_{Pi})\} = \pm(180° + k \cdot 360°) = \pm(1 + 2k)\pi$

Spesifiset muodostamissäännöt:

1. Juuriuran haarojen lukumäärä = karakteristisen polynomin asteluku.
2. Haarat alkavat avoimen silmukan navoista ja päättyvät avoimen silmukan nolliin
   $\Rightarrow$ $P - Z$ kpl. haaroja päättyy äärettömyyteen.
3. Juuriura on symmetrinen reaaliakselin suhteen.
4. Reaaliakselin osa kuuluu juuriuraan, mikäli avoimen silmukan napojen ja nollien yhteenlaskettu lukumäärä tarkastelupisteen oikealla puolella on pariton.
5. Asymptootit:

   5a. Kulmat: $\alpha_m = \pm\frac{(2k+1)}{P-Z}\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

   5b. Leikkauspiste reaaliakselilla: $\sigma_o = \frac{\sum_i s_{Pi} - \sum_i s_{Zi}}{P - Z}$

6. Urien yhtymis- ja erkanemispisteet reaaliakselilla saadaan ratkaisemalla säädetyn järjestelmän karakteristinen yhtälö K:n suhteen ($K = f(s)$) ja määrittämällä:

   $$\frac{\partial K}{\partial s} = 0$$

7. Routhin kaavion avulla voidaan määrittää K:n arvot, joilla urat leikkaavat imaginääriakselin ja edelleen leikkauspisteiden arvot.
8. Kulma, jossa ura lähtee avoimen silmukan navasta saadaan kulmaehdosta:

   $$\sum_i \angle Z_i - \sum_i \angle P_i = (2k+1)\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$